Análisis I

Lista 3: Funciones y límites 1º Física, curso 2021-22

Notación: dado $x \in \mathbb{R}$, $[x] \in \mathbb{Z}$ denota la parte entera de x.

1. Utilizando la formulación en términos de ε y δ , demostrar :

A. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$, B. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{2\,x}{3+x} = \frac{1}{2}$,

C. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$, D. $\displaystyle \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$.

2. Discutir la existencia de los límites siguientes y calcular su valor, si es posible:

A. $\displaystyle \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$. B. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

C. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin\tan x}{x}$. D. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x^2}$.

E. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\sin\frac{1}{x}$. F. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

G. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,(3+\sin x)}{(x+\sin x)^2}$. H. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x+x^2}{2\,x^2}$.

I. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+x}}{x}$. J. $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}+x-1}$.

K. $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+4}}{x^2+4\,x+3}$. L. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2^x-3^x}{x}$.

M. $\displaystyle \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4}$. N. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x}{4}\left[\frac{3}{x}\right]$.

Ñ. $\displaystyle \lim_{x\to 1} x\left[\frac{3}{x}\right]$. O. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1}\right)^{[x]}$.

P. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \left(\left|\frac{x^2-3\,x+2}{x^2+x-2}\right|^3 + x^6 - 1\right)^{[x]}$. Q. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$.

3. Encontrar las constantes a y b para las cuales

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - (a\,x+b)\right) = 1\,.$$

4. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

A. Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, entonces existe el límite $\lim_{x\to a} g(x)$.

B. Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces no existe el límite $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$.

C. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Comentarios: (*) ejercicio difícil, (**) ejercicio muy difícil.