Curso 2021/22

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

PROBLEMAS. Hoja 2

1. Definir la función incremento de los siguientes métodos y probar que está definida de manera única para cualquier (PVI)

1. Euler, $y_{n+1} = y_n + hf_n$.
2. Euler implícito, $y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}$.
3. Taylor 2, $y_{n+1} = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(f_t(t_n, y_n) + f_y(t_n, y_n)f_n)$.
4. Runge, $y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f_n)$.
5. BDF2, $y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2}$.

2. La regla de integración del trapecio se define por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right).$$

a) Probar que la función incremento asociada a esta regla, $\phi_f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times [0, h_0] \to \mathbb{R}^d$, cumple para h_0 suficientemente pequeño que:

(C1) Es continua con respecto a las variables t, y, h.

(C2) Es Lipschitz con respecto la variable y.

(C3) Si $f = 0$, entonces $\phi_f \equiv 0$.

b) Probar que cumple el criterio de la raíz

Como consecuencia la regla del trapecio es 0-estable.

3. Dado un PVI, consideramos el siguiente método numérico:

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}\left(f(t_{n+2}, y_{n+2}) + 4f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right). \tag{1}$$

a) Comprobar que se obtiene (1) aproximando $f(t, y(t))$ por el polinomio cuadrático de Lagrange de $f(t, y(t))$ en los puntos t_n, t_{n+1} y t_{n+2}

b) Obtener el orden del residuo:

$$R_n = \int_{t_n}^{t_{n+2}} f(s, y(s))ds - \frac{h}{3}\left(f(t_{n+2}, y(t_{n+2})) + 4f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + f(t_n, y(t_n))\right)$$

c) La función incremento asociada a la fórmula recurrente (1) se define como

$$\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) = \lim_{k\to\infty} \phi_f^{(k)}(t_n, y_n, y_{n+1}; h), \tag{2}$$

con $\phi_f^{(0)}$. Definir que $\phi_f^{(k)}$ en función de $\phi_f^{(k-1)}$ de manera que se satisfaga

$$y_{n+2} - y_n = h\phi_f(t_n, y_n, y_{n+1}; h) \tag{3}$$

Bajo que condiciones existe el límite (2).

d) Probar que ϕ_f es una función continua con respecto a sus variables: t_n, y_n, y_{n+1} y h.

e) Probar que ϕ_f es Lipschitz con respecto a y_n e y_{n+1}.

f) Probar que el método (3) es consistente

g) Probar que el método (3) converge

4. Considerar el método lineal multipaso (leap-frog)

$$y_{n+2} - y_n = 2hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

a) Definir su función incremento y comprobar que el método está determinado de manera única.

b) Ver si el método es consistente.

c) Ver si el método converge.

5. Sea A una matriz real cuadrada de orden k definida de la siguiente manera:

$$A(i, i+1) = 1, \qquad \text{para } i = 1, \dots, k-1 \tag{4}$$

$$A(k, j) = -\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_k}, \qquad \text{para } j = 1, \dots, k. \tag{5}$$

Demostrar que su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \lambda^j.$$

6. Sea la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \lambda Y(t), \qquad t > 0, \\ Y(0) &= 1, \end{aligned}$$

con $\lambda < 0$. La solución es $Y(t) = e^{\lambda t}$ que tiende a 0 según $t \to \infty$.

a) Considerando $t_n = nh$, determina la expresión de la solución numérica y_n utilizando Euler explícito, Euler impícito y trapecio.

b) Determinar la condición o condiciones de λ y h para que $y_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada método.