Curso 2021/22

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

PROBLEMAS. Hoja 4

1. Sea un método Runge-Kutta explícito de s pasos con tablero de Butcher c, A, b (la matriz A satisface $a_{ij} = 0$ cuando $j \geq i$).

- Definir la función incremento $\phi_f(t_n, y_n; h)$.
- Probar las tres hipótesis (H_{MN}) para dicha función.
- Probar que satisface el criterio de la raíz.
- Probar cuándo verifica las dos condiciones de consitencia.

2. Sea un método Runge-Kutta implícito (RKI) de s pasos con tablero de Butcher c, A, b (la matriz A satisface $a_{ij} \neq 0$ para algún $j \geq i$).

- Demostrar que si existe k punto fijo, $k = F_1(k)$, entonces existe ξ tal que $\xi = F_2(\xi)$ (y el recíproco) donde F_1 y F_2 se definen por las dos siguientes columnas:

$$
\begin{array}{l|l}
k_1 = f(t_n + c_1 h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{1j} k_j) & \xi_1 = y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{1j} f\left(t_n + h c_j, \xi_j\right) \\
\quad \cdots\cdots & \quad \cdots\cdots \\
k_s = f(t_n + c_s h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{sj} k_j) & \xi_s = y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{sj} f\left(t_n + h c_j, \xi_j\right)
\end{array}
$$

- Definir la función incremento $\phi_f(t_n, y_n; h)$ del RKI.
- Probar las hipótesis (H_{MN}) para dicha función.
- Probar que satisface el criterio de la raíz
- Probar cuándo verifica las dos condiciones de consitencia.

3. Sea un método Runge-Kutta explícito de 2 pasos:

$$k_1 = f(t_n, y_n), \qquad k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1), \qquad y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2).$$

a) Identificar las condiciones que han de verificar los coeficientes para que el orden de consistencia (orden de cuadratura) sea 2.

b) Probar que no pueden ser de orden 3 (**Barrera**).

4. Dado un PVI podemos escribirlo como un un problema autónomo considerando una nueva función vectorial $Z(t) = (t, Y(t))$. Así, se satisface la EDO $Z'(t) = F(Z(t)) = (1, f(t, Y(t))$. Demostrar que para que la solución numérica de un método Runge-Kutta sea la misma para las dos EDO se debe verificar la **condición suma**:

$$(\text{CS}) \qquad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Nota. Verlo considerando f una función escalar.

5. Obtener por el método de colocación el método Runge-Kutta con nodos (o parámetros de colocación) $c_1 = 1/4$ y $c_2 = 1$.

- Es un método implícito?
- Qué orden tiene?
- Cuál es su función de estabilidad? Es A-estable?

6. Sea un método Runge-Kutta explícito de 3 pasos.

a) Identificar las condiciones que han de verificar los coeficientes para que el orden de consistencia (orden de cuadratura) sea 2.

b) Bajo la condición (CS) demostrar que las condiciones para que sea de orden 3 son:

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1, \qquad b_2c_2 + b_3c_3 = \frac{1}{2}, \qquad b_2c_2^2 + b_3c_3^2 = \frac{1}{3}, \qquad b_3a_{32}c_2 = \frac{1}{6}.$$

c) Probar que no pueden ser de orden 4 (**Barrera**).

7. Demostrar que para un método Runge-Kuta de s pasos sea de orden p al menos debe verificar las siguientes condiciones

$$m! \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{s} b_{j_1}a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}\cdots a_{j_{m-1}j_m} = 1, \qquad m = 1,\ldots,p.$$

Para demostrarlo utilizar que el PVI $Y' = Y$ en $[0,1]$ con $Y(0) = 1$ su solución es $Y(t) = e^t$.

8. Primera barrera de Butcher. Utilizando el ejercicio anterior demostrar que un método Runge-Kutta explícito de s pasos no puede tener orden mayor que s.

9. No todos los métodos Runge-Kutta implícitos son A-estables. Estudiar la estabilidad y orden del método cuyo tablero es

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

10. Si un método Runge-Kutta tiene orden de consistencia p entonces su función de estabilidad satisface

$$R(z) = 1 + z + \cdots + \frac{z^p}{p!} + O(|z|^{p+1}).$$

Para verlo considerar el PVI

$$y' = \lambda y, \qquad t \in [0,T], \qquad y(0) = 1,$$

y utilizando el método RK, $y_1 = R(\lambda h)y_0$, donde R es la función de estabilidad del método. As obtenemos el resultado deseado utilizando el orden del residuo.