HOJA DE EJERCICIOS 8
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

Problema 1. De una 2-forma ω en $\mathbb{R}^3$ se sabe que:

$$\omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=2\ ,\quad \omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=-4\ ,\quad \omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)=-4\ .$$

Calcula $\omega_{(1,2,1)}\left(\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

Problema 2. Consideramos las siguientes formas diferenciales en $\mathbb{R}^3$:

$$\omega \;=\; dx - zdy \quad , \quad \nu \;=\; (x^2+y^2+z^2)dx\wedge dz + (xyz)dy\wedge dz.$$

Calcular

$$d\omega\ ,\ \omega\wedge d\omega\ ,\ d\nu\ ,\ \omega\wedge\nu\ .$$

Problema 3. Calcular los siguientes productos exteriores:

a) $(dx+dy-dz)\wedge(dx+dy+dz)$.

b) $(xdx+ydy+zdz)\wedge(xdy+ydz+zdx)$.

Problema 4. Demuestra la siguiente identidad:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} F_j dx_j\Big)\wedge\Big(\sum_{j=1}^{n} G_j dx_j\Big) \;=\; \sum_{1\le j<k\le n} (F_jG_k - F_kG_j)\, dx_j\wedge dx_k.$$

Problema 5. Hallar la diferencial exterior de las siguientes 1-formas:

(a) $xdy+ydx$; (b) $(u+v)(du+dv)$;

(c) $f(x)dx+g(y)dy$; (d) $2xydx+(x^2-y^2)dy$;

(e) $(x+z)dx+(y-z)dy+(x-y)dz$; (f) $xydz+xzdy+yzdx$.

Problema 6. Sea $\omega=\sum_{j=1}^{n} P_j dx_j$, donde $P_j=P_j(x_1,\cdots,x_n)$, $1\le j\le n$. Demuestra que

$$d\omega \;=\; \sum_{1\le j<k\le n}\left(\frac{\partial P_j}{\partial x_k}-\frac{\partial P_k}{\partial x_j}\right) dx_j\wedge dx_k.$$

Problema 7. Halla la diferencial exterior de las siguientes formas

1. $(x^2+y+z^2)\, dx\wedge dz + xyz\, dy\wedge dz - \operatorname{sen}(yz)\, dx\wedge dy$,
2. $x_3\, dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4 - x_2\, dx_1\wedge dx_3\wedge dx_4 + x_3\, dx_1\wedge dx_2\wedge dx_4 - x_4\, dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$.

Problema 8. Decimos que una 2-forma ω es **exacta** si existe una 1-forma α tal que $d\alpha=\omega$. Comprueba si las siguientes 2-formas son exactas:

(a) $du\wedge dv$, (b) $(x^2+xy+y^2)dx\wedge dy$,

(c) $xdy\wedge dz + ydz\wedge dx - 2zdx\wedge dy$.

<u>Problema</u> 9. Consideramos las 1-formas diferenciales

$$\omega \;=\; xzdy - ydx \;\;,\;\; \nu \;=\; x^3dz + dx \;,$$

y la aplicación $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(s,t) \;=\; (\,\cos s\,,\,\operatorname{sen} s\,,\,t\,)\;.$$

Calcular los siguientes *pullbacks*

$$\phi^*(\omega)\;,\;\phi^*(d\omega)\;,\;\phi^*(\omega\wedge\nu)\;,\;\phi^*(\omega\wedge d\nu)\;.$$

<u>Problema</u> 10. Comprueba que la siguiente 2-forma en $\mathbb{R}^3$

$$\omega \;=\; (1 - z\,e^{yz})\,dx\wedge dy + (1 - y\,e^{yz})\,dx\wedge dz + (2y + z + \operatorname{sen} z)\,dy\wedge dz$$

es cerrada. Concluye que es exacta y halla una 1-forma η tal que $\omega = d\eta$.

<u>Problema</u> 11. A cada campo de vectores $\mathbf{F}$, en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$, le asociamos la 1-forma $\mathbf{F}^\flat$ dada por

$$\mathbf{F}^\flat_p(v) \;=<\mathbf{F}(p), v> \qquad \text{para cualesquiera } p\in U \text{ y } v\in\mathbb{R}^3\;,$$

y le asociamos la 2-forma $\mathbf{F}^\natural$ dada por

$$\mathbf{F}^\natural_p(v,w) \;=\; \det\big[\,\mathbf{F}(p)\mid v\mid w\,\big] \qquad \text{para cualesquiera } p\in U \text{ y } v,w\in\mathbb{R}^3\;.$$

Sean $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ y $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ dos campos de vectores en U.

a) Expresa las formas $\mathbf{F}^\flat$ y $\mathbf{F}^\natural$ en términos de dx, dy, dz y las funciones F_1, F_2, F_3.

b) Demuestra que $(\mathbf{F}\times\mathbf{G})^\natural = \mathbf{F}^\flat\wedge\mathbf{G}^\flat$.

c) Estudia la relación entre el producto escalar $<\mathbf{F},\mathbf{G}>$ y la 3-forma $\mathbf{F}^\flat\wedge\mathbf{G}^\natural$.

<u>Problema</u> 12. Demuestra que si $\vec{F},\vec{G}$ son campos de vectores de clase C^2 en $\mathbb{R}^3$ se cumple

$$\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) \;\equiv\; <\vec{G}\,,\,\mathbf{rot}\,\vec{F}> - <\vec{F}\,,\,\mathbf{rot}\,\vec{G}>$$
