DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Cálculo diferencial. Hoja 6

115 *i) Usando que* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$ *y usando que*

$$\cos(A)-\cos(B)=-2\operatorname{sen}(\frac{A+B}{2})\operatorname{sen}(\frac{A-B}{2})$$

probar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0.$$

ii) Usando fórmulas trigonométricas para $\operatorname{sen}(t+h)$ *y* $\cos(t+h)$*, probar que las derivadas de las funciones* $\operatorname{sen}(t)$ *y* $\cos(t)$ *son, respectivamente*

$$\cos(t), \qquad -\operatorname{sen}(t).$$

Deducir que $\operatorname{sen}(t)$ *y* $\cos(t)$ *son de clase* $C^\infty(\mathbb{R})$*.*
iii) Obtén la derivada de $\tan(t)$ *y de* $\arctan$*, su función inversa para* $t\in(-\pi/2,\pi/2)$ *y de las funciones* $\operatorname{arc\,sen}$ *(la inversa de* $\operatorname{sen}(t)$*,* $t\in(-\pi/2,\pi/2)$*) y* $\arccos$ *(la inversa de* $\cos(t)$*,* $t\in(0,\pi)$*).*

116 *Sea* $f(t)=e^t$*.*
i) Probar que f *es diferenciable para un* $t\in\mathbb{R}$ *cualquiera si y sólo si lo es en* $t=0$*.*
ii) Para la diferenciabilidad en $t=0$*, vamos a probar que* $\frac{e^h-1}{h}\to 1$ *cuando* $h\to 0$*.*
Para ello y para $h\neq 0$*, definimos* z*, tal que* $\frac{1}{z}=e^h-1$*. Probar que*

$$\frac{e^h-1}{h}=\frac{1}{z\ln(1+\frac{1}{z})}=\frac{1}{\ln\left[(1+\frac{1}{z})^z\right]}.$$

Concluir el resultado usando la continuidad del logaritmo; ver Problema 107.
iii) Calcula la función derivada de $f(t)=e^t$ *y de su inversa* $g(x)=\ln(x)$*. Concluye que son funciones de clase* C^∞*.*
iv) Calcula las funciones derivadas de $f(t)=a^t$*,* $f(t)=a^{g(t)}$*,* $(a>0)$*,* $f(t)=t^a$ *y* $f(t)=h(t)^{g(t)}$*,* $(h(t)>0)$*.*
v) Hallar la derivada de las funciones $F(t)=\ln f(t)$*,* $(f(t)>0)$*,* $G(t)=\ln|f(t)|$*,* $(f(t)\neq 0)$*,* $H(t)=e^{f(t)}$*,* $I(x)=\log_{f(x)}(g(x))$*,* $(f(x),g(x)>0$ *y* $f(x)\neq 1$ *para todo* $x)$*, supuesto que* f *y* g *son funciones derivables en algún intervalo.*

117 *Estudia todas las derivadas que tengan las funciones*
$f(t)=\sqrt[3]{t}$, $\quad f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, $\quad f(y)=\sqrt[3]{|y|}$, $\quad f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$, $\quad f(t)=\begin{cases}1-t & \text{si } t\geq 0\\ e^{-t} & \text{si } t<0\end{cases}$, $\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$, $\quad f(z)=\begin{cases}z & \text{si } z\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } z\notin\mathbb{Q}\end{cases}$, $\quad f(t)=t^3\operatorname{sen}(\frac{1}{t})$, $\quad f(y)=\frac{y}{1+|y|}$, $y\in\mathbb{R}$

118 *Si* $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ *son funciones diferenciables, probar que* $f'(t)=g'(t)$*, para todo* $t\in(a,b)$ *sí y sólo sí existe* $k\in\mathbb{R}$ *tal que* $f(t)=g(t)+k$ *para todo* $t\in(a,b)$*.*

119 *Probar*
i) Si f *derivable y periódica de período* $T>0$*, entonces* f' *es periódica de período* $T>0$*.*
ii) Si f *es derivable y par entonces* f' *es impar.*
iii) Si f *es derivable e impar entonces* f' *es par.*

120 *Sean* $f:(a,b)\to \mathbb{R}^n$ *una función, e.d.* $f(t)=(f_1(t),\dots,f_n(t))$*, con* $f_i:(a,b)\to\mathbb{R}$*. La imágen de una función asi se llama* **curva** *en* $\mathbb{R}^n$*.*

Si $t_0\in(a,b)$ *se dice que* f *es derivable en* t_0 *si y solo si existe el límite (en* $\mathbb{R}^n$*)*

$$f'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}.$$

Probar que f *es derivable en* t_0 *si y sólo si* $f_i(t)$ *lo es para todo* $i=1,\dots,n$ *y*

$$f'(t_0)=(f_1'(t_0),\dots,f_n'(t_0)).$$

Busca una interpretación geométrica para el vector $f'(t_0)$*.*

Supongamos que $n=2$ *ó* $n=3$ *y* $f(t)$ *representa la posición de un objeto en el instante* $t\in(a,b)$*. Justifica que* $f'(t_0)$ *representa la velocidad instantanea del objeto en en instante* t_0*.*

121 *Sea* $I\subset\mathbb{R}$ *un intervalo abierto y* $f:I\to\mathbb{R}$*. Supongamos que* f *es continua en* I*, derivable en* $I\setminus\{a\}$*, siendo* a *un punto de* I*, y existe* $\lim_{t\to a}f'(t)$*. Probar que entonces existe* $f'(a)$ *y* $f'(a)=\lim_{t\to a}f'(t)$*.*

En particular, si $f\in C^1(I\setminus\{a\})$ *y existe* $\lim_{t\to a}f'(t)$*, entonces* $f\in C^1(I)$*.*

122 *i) Probar que el conjunto de funciones de* (a,b) *en* $\mathbb{R}$*, que son diferenciables, es un espacio vectorial.*
ii) Probar que el conjunto de funciones de clase $C^k(a,b)$ *es un espacio vectorial.*

123 *Probar, por inducción en* $n\in\mathbb{N}$ *la* **Fórmula de Leibniz***: si* f *y* g *son de clase* $C^n(a,b)$ *entonces* fg *es de clase* $C^n(a,b)$ *y*

$$(fg)^{n)}(t)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{j)}(t)g^{n-j)}(t),\quad t\in(a,b),$$

con $\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}$*.*

124 *Probar por inducción en* k *que si* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *y* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *son de clase* C^k *entonces* $g\circ f$ *es de clase* C^k

125 *Calcular las derivadas de las siguientes funciones, justificando previamente su derivabilidad*
$f(x)=e^{e^x}$, $\quad f(t)=t^{t^t}$, $t>0$, $\quad f(x)=(\frac{1-x}{1+x})^{2\log(1+x)}$, $x>1$, $\quad f(t)=t^{\operatorname{arc\,sen}(t)}$, $t>0$.

126 *Calcular los límites*
$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-2x-1}{x^2-x}$, $\quad \lim_{h\to0}\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}$, $\quad \lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{1-t}}$, $\quad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$, $\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^5}$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(1+t)}{t^\alpha}$, $\alpha>0$, $\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\ln(1+t)}{\ln(t)}$, $\quad \lim_{y\to\infty}\frac{e^{by}}{y^m}$, $\quad \lim_{x\to0^+}x\ln(x)^\alpha$, $\quad \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan(x)}$,
$\lim_{h\to0^+}h^h$, $\quad \lim_{h\to0^+}h^{h^2}$, $\quad \lim_{x\to0^+}x^{\sqrt{x}}$, $\quad \lim_{h\to0^+}h^{h^\alpha}$, $\quad \lim_{x\to0^+}\operatorname{sen}(x)^x$, $\quad \lim_{x\to0^+}x^{\operatorname{sen}(x)}$.

127 *Probar que en* $(0,\pi/2)$ *se verifica*

$$x<1/3\operatorname{tg}(x)+2/3\operatorname{sen}(x)$$

128 *Demostrar que* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=2^{-x}-x$ *tiene un único cero real y calcular su parte entera.*

129 *Probar que para todo* $x>0$ *se verifica*

$$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$$

130 *i) Demostrar que la diferencia entre* $\mathrm{sen}(a+h)$ *y* $\mathrm{sen}(a)+h\cos(a)$ *no es mayor que* $\frac{1}{2}h^2$.
ii) Calcular el seno de $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$ *con un error menor de* $1/100$.

131 *Calcular el polinomio de Taylor de orden* n *de las siguientes fuciones en el punto* a *indicado.*
i) $f(y)=y^5+y^3+y, \quad a=1, \quad n=4.$
ii) $f(t)=\frac{1}{t^2+1}, \quad a=0, \quad n=7.$
iii) $f(x)=x, \quad a=1, \quad n=10.$
iv) $f(t)=\frac{1}{1+t}, \quad a=0, \quad n=5.$

132 *Calcular los polinomios de McLaurin de las funciones*
$y=\mathrm{sen}(x), \quad y=\cos(t), \quad y=e^z, \quad y=e^{ax},\ a\in\mathbb{R}, \quad y=\ln(1+t) \quad y=\sqrt{1+x} \quad y=\frac{1}{1-t}$

133 *Determinar el origen de las formulas aproximadas*
i) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2, \quad |x|<1$
ii) $\sqrt[3]{1+t}\approx 1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2, \quad |t|<1$
y valorar el error de las mismas.

134 *Un hilo pesado bajo la acción de la gravedad se comba formando una* **catenaria**

$$y=a\cosh(\frac{x}{a})=a(\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2})$$

siendo $a>0$ *un parámetro.*

Demostrar que para valores pequeños de $|x|$, *la forma de la catenaria se puede representar por la parábola* $y=a+\frac{x^2}{2a^2}$.

135 *Las* **funciones trigonométricas hiperbólicas** *se definen como*

$$\cosh(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad \mathrm{senh}(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

i) Probar que ambas son no acotadas, de clase $C^\infty(\mathbb{R})$, $\cosh(0)=1$, $\mathrm{senh}(0)=0$, $\cosh(t)$ *es par,* $\mathrm{senh}(t)$ *es impar,* $\cosh'(t)=\mathrm{senh}(t)$, $\mathrm{senh}'(t)=\cosh(t)$ *y* $\cosh^2(t)-\mathrm{senh}^2(t)=1$.
ii) Encuentra los desarrollos de McLaurin de estas funciones.
iii) Estudia las funciones $\tanh(t)$ *y las inversas* $\mathrm{arcsenh}(t)$, $\mathrm{arccosh}(t)$, $\mathrm{arctanh}(t)$.

136 *Sea* $P(x)$ *un polinomio con coeficientes reales.*
i) Un número $a\in\mathbb{R}$ *es raíz de* $P(x)$ *si y sólo si* $P(a)=0$. *Probar que esto es equivalente a que* $P(x)=(x-a)Q(x)$ *donde* $Q(x)$ *es un polinomio.*
ii) Se dice que un número $a\in\mathbb{R}$ *es* **raíz doble** *de* $P(x)$ *si y sólo si* $P(x)=(x-a)^2Q(x)$ *donde* $Q(x)$ *es un polinomio tal que* $Q(a)\neq 0$.

Probar que $a\in\mathbb{R}$ *es una raíz doble si y sólo si* $P(a)=P'(a)=0$ *y* $P''(a)\neq 0$.
iii) Se dice que un número $a\in\mathbb{R}$ *es* **raíz de multiplicidad** $m\in\mathbb{N}$ *de* $P(x)$ *si y sólo si* $P(x)=(x-a)^mQ(x)$ *donde* $Q(x)$ *es un polinomio tal que* $Q(a)\neq 0$.

Probar que $a\in\mathbb{R}$ *es una raíz de multiplicidad* $m\in\mathbb{N}$ *si y sólo si* $P(a)=P'(a)=\ldots=P^{m-1)}(a)=0$ *y* $P^{m)}(a)\neq 0$.

137 *En este problema todas las funciones se toman definidas en* $\mathbb{R}$.
i) Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *números reales distintos. Probar que las funciones* $\{e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_n t}\}$ *son linealmente independientes.*
ii) Si $\lambda_0\in\mathbb{R}$ *y* $m\in\mathbb{N}$, *demuestra que las* $m+1$ *funciones* $\{e^{\lambda_0 t},te^{\lambda_0 t},\ldots,t^me^{\lambda_0 t}\}$ *son linealmente independientes.*
iii) Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *números reales distintos y* $m_1,\ldots,m_n$ *números naturales o cero. Probar que las* $m_1+\ldots+m_n+n$ *funciones*

$$\{t^ke^{\lambda_i t}, \quad i=1,\ldots,n, \quad k=0,\ldots,m_i\},$$

son linealmente independientes.
Indicación: *Las combinaciones lineales se pueden escribir como* $\sum_{i=1}^{n} P_i(t)e^{\lambda_i t} = 0$ *para todo* $t \in I\!R$, *donde los polinomios* $P_i(t)$ *tienen grado* $\leq m_i$. *Concluye que* $P_i(t) = 0$ *para todo* i.

138 *Probar que la función* $f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & si\ t \neq 0 \\ 0 & si\ t = 0 \end{cases}$ *es de clase* $C^\infty(I\!R)$ *y* $f^{k)}(0) = 0$ *para todo* $k = 0, 1, \ldots$. *¿Cómo son los polinomios de McLaurin de orden* $n \in I\!N$*?.*

139 *Probar que la función* $f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$ *es de clase* $C^\infty(I\!R)$

140 *Sea* f *una función tal que en un intervalo centrado en* 0 *verifica* $|f(x)| \leq M|x|^k$ *con* $M > 0$ *y* $k > 1$.

Demostrar que f *es diferenciable en* $x = 0$. *Demostrar que si* $k = 1$ *lo anterior no es cierto.*

141
i) Si $f : [a, b] \to I\!R$ *verifica que* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^k$ *para todo* $x, y \in [a, b]$, *con* $M > 0$ *y* $k > 1$. *Demostrar que* f *es constante.*

Demostrar que si $0 < k \leq 1$ *entonces lo anterior no es cierto.*
ii) Si $f : [a, b] \to I\!R$ *es de clase* C^1 *entonces existe* $M > 0$ *tal que* $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ *para todo* $x, y \in [a, b]$.

142 *Si* $f : [a, b] \to I\!R$ *tiene derivada continua en* (a, b) *demostrar que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $|x - y| < \delta$ *entonces*

$$\left| f'(x) - \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| < \varepsilon$$

143
i) Probar que las exponenciales $f(t) = a^t$, *con* $a > 0$ *verifican* $f : I\!R \to (0, \infty)$, $f(t + s) = f(t)f(s)$, $f(0) = 1$. *En el resto del problema vamos a ver el recíproco.*
ii) Probar que si $f : I\!R \to (0, \infty)$, $f(t + s) = f(t)f(s)$ *entonces* $f(0) = 1$*y* $f(-t) = \frac{1}{f(t)}$. *Ademas conluye que si* $t \in Q\!\!\!\!I\,$ *se tiene que* $f(t) = f(1)^t$.
iii) Si f *es continua en* $t = 0$ *entonces es continua en todo* $I\!R$. *Concluye ademas que* $f(t) = f(1)^t$ *para* $t \in I\!R$.
iv) Probar que si $f : I\!R \to (0, \infty)$, $f(t + s) = f(t)f(s)$, $f(0) = 1$ *es derivable en* $t = 0$ *y llamamos* $b = f'(0)$, *entonces es derivable en todo* $I\!R$ *y* $f'(t) = bf(t)$ *para todo* $t \in I\!R$.

Obtener de aqui que f *es de clase* C^∞ *y calcular todas las derivadas* $f^{k)}(t)$. *Escribe el desarrollo Mc Laurin.*
v) Demuestra que si f *es como en el apartado anterior entonces* $f(t) = Ae^{bt}$, $t \in I\!R$ *y cierta constante* $A > 0$.

144 *Sea* f *una función diferenciable tal que* $f'(t) = b(t)f(t)$, $t \in I\!R$, *donde* $b(t)$ *es o bien una constante o bien* t *o* t^2 *o* $\operatorname{sen}(t)$.
i) Supongamos que $f(0) > 0$. *Probar que en un intervalo alrededor de* 0 *se tiene* $f(t) > 0$ *y para esos* t, *se tiene que* $f(t) = Ae^{B(t)}$ *para cierta constante* $A > 0$ *y cierta función* $B(t)$ *relacionada con* $b(t)$.

Deducir que $f(t) > 0$ *para todo* $t \in I\!R$ *y que* $f(t) = Ae^{B(t)}$ *para* $t \in I\!R$.
ii) Repite lo anterior si $f(0) < 0$.
iii) ¿Como crees que es $f(t)$ *para una función* $b(t)$ *continua cualquiera?.*

145 *Supongamos que* $f : I\!R \to I\!R$ *es derivable y verifica* $f'(t) \geq \alpha > 0$ *para todo* $t \in I\!R$. *Probar que* f *es biyectiva sobre* $I\!R$, *su inversa es diferenciable y la derivada de la inversa toma valores entre* 0 *y* $\frac{1}{\alpha}$.

146 *Supong* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *es derivable y* $f'(t) \neq 1$ *para todo* $t \in [0, 1]$. *Probar que existe un único* $t_0 \in [0, 1]$ *tal que* $f(t_0) = t_0$.

147 *Probar que* $f(x) = x^3 - 3x + m$ *no tiene dos raices en* $[0, 1]$ *para ningun valor de* m.