

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Análisis de Variable Real. Curso 13–14.

La integral de Riemann. Hoja 8

**156** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Si  $p, q$  son particiones de  $[a, b]$  y  $p$  es más fina que  $q$ , probar que  $S(f, p) \leq S(f, q)$ . Para ello, suponer primero que  $p$  tiene un punto más que  $q$  y luego proceder por inducción.

**157** Dar un ejemplo de una función en  $[0, 1]$  tal que  $|f|$  es integrable Riemann y  $f$  no lo es.

**158** Dar un ejemplo de una función  $f(t) > 0$  integrable Riemann en  $[0, 1]$  y tal que  $\frac{1}{f}$  no lo es.

**159** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada. Probar que  $f$  es integrable Riemann si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existen  $p_1, p_2$  particiones de  $[a, b]$  tales que

$$0 \leq S(f, p_1) - s(f, p_2) \leq \varepsilon$$

**160** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  acotada y supongamos que  $\{p_N\}_{N=1}^{\infty}$  es una sucesión de particiones de  $[a, b]$  tal que

$$(0 \leq) S(f, p_N) - s(f, p_N) \rightarrow 0 \quad \text{con } N \rightarrow \infty.$$

Probar que  $f$  es integrable Riemann y que

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} S(f, p_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} s(f, p_N)$$

**161** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann,  $t_0 \in (a, b)$  y  $A \in \mathbb{R}$ . Definimos  $g(t) = \begin{cases} f(t), & t \neq t_0 \\ A, & t = t_0 \end{cases}$

Probar usando particiones que  $g$  es integrable Riemann y que  $\int_a^b g(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ .

Por inducción tratar el caso en que modificamos  $f$  en un conjunto finito de puntos.

**162** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable Riemann. Definimos la parte positiva y la parte negativa de  $f$  como

$$f^+(t) = \frac{f(t) + |f(t)|}{2}, \quad f^-(t) = \frac{|f(t)| - f(t)}{2}, \quad t \in [a, b].$$

Probar

i)  $f^+(t) \geq 0$ ,  $f^-(t) \geq 0$ , para todo  $t \in [a, b]$  y son integrables Riemann.

ii)  $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$ ,  $|f|(t) = f^+(t) + f^-(t)$ ,  $f^+(t) \cdot f^-(t) = 0$  para todo  $t \in [a, b]$ .

iii)  $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f^+(t) dt - \int_a^b f^-(t) dt$  y  $\int_a^b |f|(t) dt = \int_a^b f^+(t) dt + \int_a^b f^-(t) dt$

iv)  $f^2 = (f^+)^2 + (f^-)^2$ .

**163** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(t) \geq 0$  para todo  $t \in [a, b]$  y supongamos que

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

para todo intervalo abierto  $I \subset [a, b]$ . Probar que  $f(t) = 0$  para todo  $t \in [a, b]$ . Idem si  $f$  es monótona.

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.

Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

**165** Calcular las derivadas de las funciones  $\int_a^{b(t)} f(r) dr$ ,  $\int_{a(t)}^b f(r) dr$  y  $\int_{a(t)}^{b(t)} f(r) dr$ , supuesto que  $f$  es continua y  $a(t)$ ,  $b(t)$  son derivables.

**166** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $L$  periódica, probar que  $\int_a^{a+L} f(t) dt$  no depende de  $a \in \mathbb{R}$ .

**167** Si  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  es par e integrable Riemann, probar que  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ , de dos maneras distintas: usando particiones y usando un cambio de variable.

De la misma manera si  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  es impar, probar que  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ .

**168** Sea  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  continua y  $M = \sup\{f(t), t \in [a, b]\}$ . Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f^n(t) dt \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

**169** Sea  $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$  para  $x > 0$ .

i) Usando propiedades de la integral de Riemann probar que  $L$  es continua, derivable, estrictamente creciente,  $L(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ ,  $L(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $L(1) = 0$ .

ii) Probar que  $L(xy) = L(x) + L(y)$ ,  $L(x^n) = nL(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L(x^r) = rL(x)$ ,  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $L(x^y) = yL(x)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

iii) Concluir que la inversa de  $L$ ,  $L^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  es derivable, verifica  $L^{-1}(t+s) = L^{-1}(t)L^{-1}(s)$  y usar el Problema 143 para probar que  $L^{-1}(t) = e^t$ . Concluir que  $L(x) = \ln(x)$  para  $x > 0$ .

iv) Probar que  $L'(x) = \frac{1}{x}$  y que por tanto  $L(x) = \ln(x)$  para  $x > 0$ .

**170** Sea  $f$  una función derivable tal que  $f'(t) = b(t)f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $b(t)$  una función continua en  $\mathbb{R}$ .

Usando las herramientas del Problema 144 probar que si  $f(0) = A$ , entonces  $f(t) = Ae^{B(t)}$  para cierta función  $B(t)$  relacionada con  $b(t)$  y con  $B(0) = 0$ .

**171** Calcular las siguientes primitivas:

a)  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

b)  $\int \frac{\log t}{\sqrt{t}} dt$

c)  $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx$

d)  $\int \operatorname{sen} z \log(\cos z) dz$

e)  $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} dx$

f)  $\int \operatorname{arctg} \sqrt{u} du$

g)  $\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx$

h)  $\int \frac{e^s - 3e^{2s}}{1 + e^s} ds$

i)  $\int \frac{t}{at + b} dt$

j)  $\int \sec^6 z dz$

k)  $\int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^3 dx$

l)  $\int (2t + 1)^8 dt$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\begin{array}{lll}
o) \int \frac{x^2}{x^2 - x + 1} dx & p) \int \frac{e^{4z} + e^z + 1}{e^z} dz & q) \int \frac{t}{t^2 - 4t + 1} dt \\
r) \int \sqrt{1 + \cos x} dx & s) \int \frac{1}{2s^2 - 3s + 2} ds & t) \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \\
u) \int \frac{x^3 + 2x + 4}{x^3 + 9x} dx & v) \int \log t dt & w) \int \frac{4z^2 - 2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} dz \\
x) \int t(\log t)^2 dt & y) \int x^2 \operatorname{sen} x dx & z) \int ax e^{bx} dx \\
\alpha) \int \sqrt{z^2 - 2} dz & \beta) \int t^2 \sqrt{t^2 - 1} dt & \gamma) \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx \\
\delta) \int \sqrt{2 + s^2} ds & \epsilon) \int \frac{\sqrt{3 + x^2}}{x} dx & \phi) \int \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} dt \\
\lambda) \int z^2 \sqrt{1 + z^2} dz & \mu) \int \frac{3 - x^2}{x} dx & \nu) \int \sqrt{1 - t^2} dt
\end{array}$$

172 Calcular las siguientes integrales definidas

$$\begin{array}{lll}
a) \int_{-13}^{13} (x + x^3 + x^5) dx & b) \int_{-10}^{10} (x^2 + 7x^6) dx & c) \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx \\
d) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(x) dx & e) \int_{-a}^a x^8 \operatorname{sen}(x) dx & f) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) dx
\end{array}$$

173 Probar que  $\int_a^\infty f(t) dt$  es convergente si y sólo si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $t_0 > a$  tal que para todos  $x, y > t_0$  se tiene

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

174 Supongamos que  $\int_0^\infty f(t) dt$  es convergente.

i) Probar que si existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = c$  entonces  $c = 0$ .

ii) Dar un ejemplo en el que  $\int_0^\infty f(t) dt$  converge pero no existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

iii) Probar si es cierto, o dar un contraejemplo, que si además  $f \geq 0$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ .

175 Estudiar la convergencia de las integrales impropias

$$i) \int_0^\infty \operatorname{sen} x dx, \quad ii) \int_1^\infty e^{-t^2} dt, \quad iii) \int_0^\infty y \cos y dy, \quad iv) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + x^2} dx, \quad v) \int_1^\infty \frac{\ln s}{(1 + s^2)^2} ds,$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$i) \int_0^\infty x^\alpha dx, \quad ii) \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx, \quad iii) \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx, \quad iv) \int_0^\infty x^p e^{-x} dx, \quad v) \int_0^\infty x^p e^{-x} dx, \quad p, q > 0,$$

$$\begin{aligned}
 ix) \int_0^1 \frac{\log(1-t)}{(1-t)^{1/2}} dt, \quad x) \int_0^\infty e^{-(t^2+t^{-2})} dt, \quad xi) \int_0^\infty \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt, \quad xii) \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x(x^2-1)^{1/2}} dx, \quad xiii) \\
 \int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad xiv) \int_0^1 \ln(x) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad xv) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx, \quad xvi) \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad xvii) \\
 \int_0^1 \sqrt[3]{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} dx, \quad xviii) \int_0^1 (\ln(t))^4 dt
 \end{aligned}$$

177 Estudiar la convergencia de las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha e^{-\beta k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\beta(n)}{n^\alpha}$$

178 i) Calcular como función de  $s$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

para  $f(t) = 1$ ,  $f(t) = t$ ,  $f(t) = t^n$ ,  $f(t) = e^{at}$ ,  $f(t) = \cos(bt)$ ,  $f(t) = \operatorname{sen}(bt)$ .

La función  $F(s)$  se llama **Transformada de Laplace** de la función  $f(t)$ .

ii) Probar que si  $f$  es integrable Riemann en todo intervalo acotado de  $[0, \infty)$  y verifica  $|f(t)| \leq Me^{at}$  para  $t \geq 0$ , entonces su transformada de Laplace esta bien definida para  $s > a$ .

179 Para  $s > 0$ , definimos la **Función Gamma de Euler** como  $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t} dt$ .

i) Demuestra que  $\Gamma(s)$  converge para todo  $s > 0$ .

ii) Demuestra que  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  para  $s > 0$  y concluye que  $\Gamma(n+1) = n!$  para  $n \in \mathbb{N}$ .



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70