ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 1

1. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los dos ejes OX y OY. Sea $V = \{\iota, \sigma_0, \sigma_X, \sigma_Y\}$, donde ι es la aplicación identidad en $\mathbb{R}^2$; σ_0, σ_X y σ_Y son las simetrías respecto al origen, y respecto a los ejes OX y OY, respectivamente. Demostrad que $(V, \circ)$ es un grupo, donde $\circ$ es la composición de aplicaciones. Hallad la tabla de $(V, \circ)$, llamado el *grupo de Klein*.

2. En el intervalo $G = (-1, 1)$ de la recta real se define la siguiente operación: $\forall x, y \in G\ x * y = \frac{x+y}{1+xy}$. ¿Es $(G, *)$ un grupo?

3. Halla los inversos de los siguientes elementos, cada uno en su grupo correspondiente.

   (a) $\overline{11}$ en $U(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})$;

   (b) $\overline{5}$ en $U(\mathbb{Z}/31\mathbb{Z})$.

4. Sea G un grupo. Demostrad que las siguientes condiciones son equivalentes.

   (a) G es abeliano;

   (b) $\forall a, b \in G\ (ab)^2 = a^2b^2$;

   (c) $\forall a, b \in G\ (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

5. (i)¿El producto directo de grupos cíclicos es cíclico?; (ii) halla todos los elementos del grupo $S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; (iii) Halla los elementos de orden 9 del grupo $S_3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

6. Demostrad que si un grupo G tiene un número par de elementos entonces hay al menos uno, distinto del neutro que es su propio inverso.

7. Demostrad que para que un subconjunto distinto del vacío de un grupo finito sea subgrupo basta que sea cerrado para la operación. Vale lo mismo para grupos infinitos?

8. Sea $a \in G$ y $o(a) = r$.

   i) Si $j \in \mathbb{Z}$ es relativamente primo con r entonces a y a^j generan el mismo subgrupo, en particular $o(a^j) = r$.

   ii) Si j divide a r (i.e., si $r = j.d$) entonces $o(a^j) = d$.

9. Si $o(a) = r$, entonces $o(a^k) = \frac{r}{mcd(r,k)}$. En particular $o(a^k)$ divide a $o(a)$.

10. Si $o(a) = r$, $o(b) = s$ y $mcd(r, s) = 1$ entonces $< a > \cap < b >= \{e\}$ (la intersección de los subgrupos generados es el subgrupo trivial).

11. Halla el orden de cada elemento de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y compara con el problema **??**.

12. (Grupo de cuaterniones) Calculad los elementos y la tabla de multiplicación del subgrupo G de $GL_2(\mathbb{C})$ generado por las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

    (a) (Presentación)Demuestra que $o(A) = o(B) = 4$; $A^2 = B^2$, y $BA = AB^3$.

    (b) Demuestra que $G = \{1, B, B^2, B^3, A, AB, AB^2, AB^3\}$, y tiene 8 elementos.

    (c) Observa que se puede calcular la operación de grupo $G \times G \to G$ con los datos de (a).

13. (Diédrico de orden 4) Sea $(H, \cdot)$ el subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ generado por $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

    (a) (presentación)Demuestra que $o(A) = 2$, $o(B) = 4$, $BA = AB^3$.

(b) Demuestra que $G = \{1, B, B^2, B^3, A, AB, AB^2, AB^3\}$ y que tiene 8 elementos.

(c) Observa que se puede calcular la operación de grupo $G \times G \to G$ con los datos de (a).

14. Sean $A = (1,2)$ y $B = (1,2,3)$ en S_3. Demuestra que lo generan y halla la presentación de S_3 en término de propiedades de A y B (como en los ejemplos anteriores).

15. Sea G el subgrupo de $\mathbb{C}^*$ generado por $A = e^{\frac{2\pi i}{8}}$. Halla la presentación de G en términos de A.

16. Sean x y g elementos de un grupo G. Demostrad que para todo $n \in \mathbb{N}$, $(x^{-1}gx)^n = x^{-1}g^n x$. Deducid que g y $x^{-1}gx$ tienen el mismo orden.

17. Sea G abeliano. Si $o(a) = r$, $o(b) = s$ y $mcd(r,s) = 1$, entonces $o(ab) = rs$ (Sug: Si $(ab)^j = e$ se deduce, de $a^j = b^{-j}$, que $o(a^j)$ es un divisor común de r y de s (ver **??**) luego $o(a^j) = 1$, y por tanto $a^j = e$).

18. Sea G un grupo abeliano y $n \in \mathbb{N}$ no nulo. ¿Es $G_n = \{x \in G : o(x) \text{ divide a } n\}$ un subgrupo de G? ¿Ocurre lo mismo si G no es abeliano?

19. Encontrad un grupo G y elementos $a, b \in G$ tales que $o(a)$ y $o(b)$ sean coprimos pero $o(ab) \neq o(a)o(b)$.

20. Hallar el retículo de los subgrupos de los siguientes grupos:

    a) el grupo de cuaterniones (problema **??**).

    b) el grupo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

    c) el grupo $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

21. Un grupo G tiene subgrupos H y K. Encontrar todos los posibles órdenes de $H \cap K$ cuando:

    a) $|H| = 16$ y $|K| = 20$;

    b) $|H| = |K| = 7$

22. Demostrad que un grupo G es abeliano si y solamente si $f : G \longrightarrow G, \quad f(x) = x^{-1}$ es un automorfismo.

23. Hallar las clases a la derecha y las clases a la izquierda del subgrupo $K = \{(1), (12)\}$ en S_3. Comprobar si se verifica que $\sigma K = K\sigma$ para todo $\sigma \in S_3$.

24. El siguiente subconjunto de S_4 es un subgrupo, llamado el *cuarto grupo alternado*:

    $A_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$.

    a) Repetir el problema **??** para $S = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \leq A_4$.

    b) Definir un isomorfismo entre S y el grupo de Klein del ejercicio **??**.

    ($(1) := Id$; $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \leftrightarrow \sigma(a_i) = a_{i+1}$, $\sigma(a_k) = a_1$ y $\sigma(a) = a$, $\forall a \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$)

25. Comprobar si las clases a la izquierda coinciden con las clases a la derecha para los siguientes subgrupos

    i) $H_1 = \{0, 3\}$ en $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$;

    ii) $H_2 = \{(1), (123), (132)\}$ en S_3;

    iii) $H_3 = \{(1), (12)\}$ en S_3.

26. Dado el grupo S_3 y el subgrupo $K = \{(1), (12)\}$ de S_3. Hallar KL cuando:

    a) $L = \{(1), (13)\}$;

    b) $L = \{(1), (12)\}$;

    c) $L = \{(13), (23), (123)\}$.

27. Con la notación de ejercicio anterior. Hallar el número de elementos del conjunto KL en los casos en que L sea subgrupo de S_3.

28. Sea G un grupo abeliano de orden pq con con p y q primos distintos. Demostrad que G es cíclico.

29. Se define $f : D_3 \longrightarrow \{1, -1\}$ mediante: $f(g) = 1$ si g es una rotación y $f(g) = -1$ si g es una simetría. Demostrad que f es un homomorfismo de grupos.

30. Calcula los conjuntos $Hom(\mathbb{Z}, D_3)$, $Hom(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, D_3)$.

31. Sea G un grupo de orden 8. Probad que o bien G es cíclico o $a^4 = 1$, para cada $a \in G$

32. Sea H un subgrupo de K, y K un subgrupo de un grupo G ¿Qué órdenes puede tener K si $|H| = 4$ y $|G| = 24$?

33. Sea G un grupo. Suponed que existe un único $a \in G$ de orden 2. Demostrad que $a \in Z(G)$.

34. Calcula $Z(G)$ para el grupo en el Problema **??**.

35. Sea $\mathbb{C}$ el grupo aditivo de los complejos. Sean $J = \{a+bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $H = \{2a+3bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ subgrupos de $\mathbb{C}$. Demostrar que el índice de H en J es 6.

36. Encontrad el número de generadores de los grupos cíclicos de órdenes $6, 8, 12$ y 60.

37. Encontrad el número de elementos de cada uno de los grupos cíclicos indicados:

    i) El subgrupo de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ generado por el 25.

    ii) El subgrupo de $\mathbb{C}^*$ generado por $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

    iii) El subgrupo de $\mathbb{C}^*$ generado por $1 + i$.

38. Para cada uno de los siguientes grupos encontrad todos sus subgrupos y elaborad el retículo correspondiente: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, ; y $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

39. Encontrad todos los órdenes de los subgrupos de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, y $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$.

40. ¿Verdadero o falso?

    i) Todo grupo cíclico es abeliano.

    ii) Todo grupo abeliano es cíclico.

    iii) El grupo aditivo $\mathbb{Q}$ es cíclico.

    iv) Todo elemento de todo grupo cíclico genera el grupo.

    v) Existe al menos un grupo no abeliano para cada orden > 0.

    vi) Todo grupo de orden ≤ 4 es cíclico.

    vii) Todos los generadores de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ son primos.

    viii) Todo grupo cíclico de orden > 2 tiene al menos dos generadores distintos.

41. Sean p y q números primos. Encontrad el número de generadores del grupo $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

42. Mostrad que en un grupo cíclico finito G de orden n, la ecuación $x^m = e$ tiene exactamente m soluciones para cada m que divida a n ¿Qué ocurre si $1 < m < n$ y m no divide a n?

43. El subgrupo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ generado por las clases de $\frac{3}{2}$ y de $\frac{1}{5}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

44. Sea G un grupo abeliano y sean H y K subgrupos cíclicos finitos con $|H| = r$ y $|K| = s$. Demostrad que si r y s son coprimos, entonces G contiene un subgrupo cíclico cuyo orden es rs.

45. Hallad los grupos de automorfismos de los siguientes grupos: $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. ¿Son isomorfos?