ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 2

1. Se considera el tercer grupo diédrido D_3. Se pide hallar lo siguiente:
   i) Las clases de conjugación de cada uno de sus elementos.
   ii) Los elementos de $Int(D_3)$.
   iii) Los centralizadores $C_{D_3}(x)$, para cada $x \in D_3$.
   iv) Los normalizados $N(H)$, para cada $H < D_3$.
2. Comprobad explícitamente que en D_3 se satisface la ecuación de clases de conjugación.
3. Hallad el centro de $Q_8 = \langle i, j : i^4 = j^4 = 1, ji = i^3 j \rangle = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$, donde $k := ij$.
4. Hallad H^d para cada $H \leq D_4$ y para cada $d \in D_4$.
5. Encontrar todos los subgrupos normales de D_4.
6. Sea G un grupo. ¿Verdadero o falso?
   i) $H \leq G$ y H conmutativo implica $H \trianglelefteq G$.
   ii) $H \leq G$ y $|H| = 2$ implica $H \trianglelefteq G$.
   iii) Si $\varphi \colon G \to G_1$ es un homomorfismo de grupos, entonces $Im\,\varphi \trianglelefteq G_1$
   iv) Si $H \trianglelefteq K$ y $K \trianglelefteq G$, entonces $H \trianglelefteq G$.
   v) Si $H \trianglelefteq G$ y $|H| = m$ entonces H es el único subgrupo de G de orden m.
   vi) Si $H \trianglelefteq G$ entonces $H \leq Z(G)$.
7. Si N es un subgrupo normal de G y N tiene dos elementos, demostrad que entonces N está incluido en el centro de G (esto es equivalente a: grupos de centro trivial no tienen subgrupos normales de orden 2).
8. Hallad el normalizador de $\langle b \rangle$ en $D_3 := \langle a, b : o(a) = 2, o(b) = 3, ba = ab^2 \rangle$.
9. Sean H y K dos subgrupos de G tales que H está incluido en $N_G(K)$, el normalizador de K en G. Demostrar que HK es un subgrupo de G. Deducir que si H es un subgrupo de G y K es normal en G, HK es un subgrupo de G.
10. Sea G un grupo para el que existe un entero $n > 1$ tal que $(ab)^n = a^n b^n$ para todos los elementos a y b de G. Sean $H_1 = \{x^n : x \in G\}$ y $H_2 = \{x \in G : \text{orden}(x) | n\}$. Demostrar que H_1 y H_2 son subgrupos normales de G.
11. Sea G una grupo y sea N un subgrupo normal de G. Sea x un elemento de torsión de G. Demostrad que el orden de xN en G/N es un divisor del orden de x en G.
12. Demostrad que $G = \{m + \sqrt{2}n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo con respecto a la suma. Demostrad que $H = \{5^k 3^s : k, s \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo con respecto a la multiplicación. ¿Son G y H isomorfos?
13. Si A es un grupo abeliano con n elementos y k es un entero primo con n, demostrad que la aplicación $\varphi : A \longrightarrow A$ definida por $\varphi(a) = a^k$ es un isomorfismo.
14. Sea N un subgrupo normal de G tal que G/N tiene orden n. Demostrad que si n y m son primos entre sí, la relación $x^m = e$ implica que xN es N.
15. Sea G un grupo abeliano con n elementos y p un entero primo con n. Demostrad que para todo $a \in G$ la ecuación $x^p = a$ tiene una solución en G.
16. Sea f un homomorfismo suprayectivo de G en $\mathbb{Z}$. Demostrad que para todo número entero positivo n, G tiene un subgrupo normal de índice n.
17. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G tal que $G/N \cong \mathbb{Z}$. Demostrad que para todo entero positivo n, G tiene un subgrupo normal de índice n.
18. Dado un grupo G y un subgrupo normal N tal que G/N es cíclico de orden 6, describid el retículo de los subgrupos de G que contienen a N.

19. Sea $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ (el *grupo circular*). Utilizad el primer teorema de isomorfía para demostrar que $\mathbb{S}^1$ es isomorfo al grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Hallad el subgrupo de $\mathbb{S}^1$ formado por todos los elementos de torsión. ¿A qué subgrupo de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ corresponde?

20. Demostrad que si H es un subgrupo de un grupo G, $H \subseteq Z(G)$ y G/H es cíclico, entonces G es abeliano.

21. Hallad $D_4/Z(D_4)$.

22. Demostrad que si G es un grupo no conmutativo y tiene orden p^3 (p un número primo) entonces $Z(G)$ tiene orden p.

23. ¿Cuántos homomorfismos sobreyectivos se pueden definir entre los siguientes grupos aditivos?
    (a) de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$,
    (b) de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ y
    (c) de $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.

24. Definid un homomorfismo (si es posible) entre los siguientes grupos:
    (a) de S_3 en $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ inyectivo,
    (b) de S_3 en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sobre y
    (c) de S_3 en $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ no constante.

25. Hallad todos los homomorfismos de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $Aut(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$.

26. Sean G_1 y G_2 dos grupos finitos de órdenes primos entre sí. ¿Cuántos homomorfismos hay de G_1 en G_2?

27. Sea G un grupo y $H, K \trianglelefteq G$. Demostrad que si $H \cap K = \{1\}$ y $HK = G$ entonces $G/H \cong K$.

28. Dad un ejemplo de un grupo G que posea un subgrupo normal N tal que N y G/N sean cíclicos pero G no lo sea.