**ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. Hoja de problemas 4**

1. Sean $N$ y $K$ grupos y $\theta$ un homomorfismo de $K$ en $Aut(N)$. Demostrad que:

   Si $N \rtimes_\theta K$ es conmutativo, entonces $\varphi$ es constante (es decir, el producto es directo).

   ¿Se satisface también el recíproco?.

2. Sea $p$ un número primo. Demostrad que $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ no es producto semidirecto (no trivial).

3. Demostrad que el grupo de los cuaterniones $Q_8$ no es producto semidirecto (no trivial).

4. ¿Cuántos productos semidirectos hay?:

   i) de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$;

   ii) de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

   iii) de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

   iv) de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$;

5. Hallad todos los productos semidirectos de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para los posibles homomorfismos de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $Aut(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$. ¿Son los grupos hallados isomorfos?

6. Sea $G$ un grupo de orden $pq$ con $p$ y $q$ primos $p > q$ y $p-1$ no divisible por $q$. Demostrad que $G$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

7. Una sucesión exacta corta de grupos es un diagrama del tipo

   $$\{1\} \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} G_2 \xrightarrow{f_3} G_3 \xrightarrow{f_4} \{1\},$$

   donde los $f_i$ son homomorfismos de grupos para $i = 1, 2, 3, 4$ ($f_1$ y $f_4$ son constantes) y satisfacen $Im(f_i) = Nuc(f_{i+1})$, para $i = 1, 2, 3$.

   a) Demostrad que $f_2$ es inyectiva y $f_3$ es sobre.

   b) Sea $G$ producto semidirecto de $N$ por $K$. Construid una sucesión exacta corta con los grupos $G$, $N$ y $K$ y homomorfismos adecuados.

   c) Construid una sucesión exacta corta (como en b)) para $D_n$.

8. Demuestra que $Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = S_3$, y que la única estructura posible de producto semidirecto

   $$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes_\theta \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

   es la dada por el producto usual.

9. (a) Demuestra que $A_4$ tiene un único 2-grupo de Sylow, indica cuales son sus elementos y observa que es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   (b) Expresa al grupo $A_4$ como producto semidirecto del anterior con $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, indicando el homomorfismo de grupos $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ que define dicha estructura.

10. Un subgrupo $H$ de $S_n$ se dice transitivo si para cada $i, j \in I_n$ existe $\sigma \in H$ tal que $\sigma(i) = j$.

    i) Demostrad que si $H$ es un subgrupo transitivo de $S_n$ entonces la acción natural de $H$ sobre $I_n$ tiene una única órbita. Concluid que $n$ divide al orden de $H$.

    ii) Hallad los subgrupos transitivos de $S_4$.

11. Hallad los subgrupos de Sylow de $S_5$.

12. Hallad los subgrupos de Sylow de $D_6$.

13. Demostrad que todo grupo de orden 175 es abeliano.

14. ¿Cuántos grupos no abelianos de orden 28 tienen al menos un elemento de orden 4?

15. Sea $G$ un grupo finito y $p$ un número primo. Demostrad que si $P$ es el único $p-$subgrupo de Sylow de $G$ y $f : G \to G$ es un homomorfismo. Entonces $f(P) \leq P$.

16. Sea $G$ un grupo finito y $H$ un subgrupo normal de $G$ con $|H| = p^k$. Demostrad que $H \subset P$ para todo $P$, $p-$subgrupo de Sylow de $G$.

17. Demostrar que todo grupo de orden $5^3 \times 7^3$ tiene un subgrupo normal de orden 125.

18. Demostrar que todo grupo de orden 312 tiene un $p$-subgrupo de Sylow normal para algún primo que divide al orden del grupo.

19. Hallad todos los grupos abelianos de órdenes 36, 64, 96 y 100.

20. Hallad grupos isomorfos a los grupos $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ que sean producto directo de grupos cíclicos de órdenes potencias de primos.

21. Hallad todos los grupos abelianos de orden 175.

22. ¿Cuántos elementos de orden 3 puede tener un grupo abeliano de orden 36?

23. Sean $G$ y $H$ dos grupos abelianos con $G$ de orden 2 y $H$ de orden 16. ¿Cuántos homomorfismos hay de $G$ en $H$?, para los posibles $G$ y $H$.