ESTADÍSTICA

DISTRIBUCIONES EN EL MUESTREO HOJA 2

1. Sea X una característica que puede tomar los valores 1, 2, 3 y 4 con probabilidades 1/8, 2/8, 4/8 y 1/8 respectivamente. Se extrae una m.a.s.(2) de esta característica y se calcula el valor medio de los valores observados. Se pide calcular la distribución del espacio muestral y del estadístico , $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$, media muestral.

2. Dada una m.a.s. $X_1, ..., X_n$, calcular la distribución en el muestreo de la media muestral si la población es
   (a) Poisson de parámetro λ
   (b) Bernoulli de parámetro p.
   (c) Exponencial de parámetro λ
   (d) Gamma de parámetros a y p.

3. Determinar la distribución en muestreo de $\overline{X}$ y σ^2, correspondientes a una muestra aleatoria simple, de tamaño n, de la variable aleatoria
$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \theta \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-\theta \end{cases}$$

4. En un dado de quinielas están marcados los resultados 1, 2 y X. Para hacer inferencias acerca de las probabilidades p_1, p_2 y p_X de cada resultado, se lanza tres veces el dado. Construir el espacio muestral (de tamaño 3). Hallar la distribución del estadístico (T_1, T_2, T_X), siendo T_i la frecuencia de resultados iguales a i. Determinar la distribución de T_X, su media y su varianza. Calcular la covarianza entre T_1 y T_2.

5. Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una m.a.s.(n) de una característica X que se distribuye con función de densidad f(x), determinar las distribuciones en el muestreo de los estadísticos $T_1(X_1, X_2, ..., X_n) = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$ y $T_2(X_1, X_2, ..., X_n) = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$

6. Sea (X_1, X_2, X_3) una muestra aleatoria de una población que sigue una distribución definida por la función:
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{resto.} \end{cases}$$
Calcular la probabilidad de que el estadístico $X_{(1)} = \min(X_1, X_2, X_3)$ exceda la mediana de la distribución.

7. Sea $X_1, X_2, ...X_n$ una muestra aleatoria simple de una distribución uniforme en $(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$. Detereminar la distribución en el muestreo del mínimo $X_{(1)}$ y del máximo $X_{(n)}$. Determinar además sus esperanzas y deducir un estadíistico no nulo, cuya esperanza sea cero.

8. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria discreta con función de probabilidad
$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}, \quad \text{si } x = 1, 2, ..., \theta$$
siendo θ un número natural. Si $T_1 = 2X_1 - 1$ y $T = X_{(n)}$, calcular $E[T_1/T = t]$. Deducir que $E[T_1/T]$ es un estadístico, función de T y calcular su esperanza.

9. Sea $(X_1, X_2, ..., X_n)$ una m.a.s.(n) de una característica X que se distribuye según una $N(\mu, \sigma^2 = 10)$. Hallar el tamaño muestral n necesario para que el error absoluto cometido al aproximar la media poblacional μ, por la media muestral $\overline{x}$, no sea superior a 5 con probabilidad 0.954.

10. Sea $(X_1, X_2, ..., X_6)$ una muestra aleatoria de una característica X de una población $N(\mu, \sigma^2 = 12)$, calcular $P\{2.3 < S^2 < 22.2\}$ donde S^2 es la cuasivarianza muestral.

11. Sea $(X_1, X_2, ..., X_{25})$ una muestra aleatoria de una característica $N(3, \sigma^2 = 100)$, calcular $P\{0 < \overline{X} < 6, 55.2 < S^2 < 145.6\}$

12. Sea $(X_1, X_2, ..., X_{25})$ e $(Y_1, Y_2, ..., Y_{25})$ dos muestras aleatorias e independientes de dos poblaciones normales $N(0, \sigma = 4)$ y $N(1, \sigma = 3)$ respectivamente. Calcular $P\{\overline{X} > \overline{Y}\}$.

13. Calcular los extremos del intervalo simétrico respecto de la media que dejan fuera al 5% de las observaciones de una distribución $N(\mu, \sigma)$.

14. Calcular los extremos del intervalo simétrico respecto de la media μ que contienen al 50% de las observaciones de la distribución normal $N(\mu, \sigma)$.

15. Calcular los datos que faltan en las siguientes igualdades:

(a) $P\{N(0,1) > 1.96\} =$	(b) $P\{N(0,1) \leq \quad \} = 0.8212$
(c) $P\{\chi^2_{21} > 20.3\} =$	(d) $P\{\chi^2_4 \leq \quad \} = 0.975$
(e) $P\{t_a 14 \leq 2.62\} =$	(f) $P\{t_{19} > \quad \} = 0.1$
(g) $P\{F_{3,5} > 12.06\} =$	(h) $P\{F_{5,3} < \quad \} = 0.01$

16. Calcular la media y la desviación típica de una variable aleatoria normal X donde se conoce:

$$P(X \geq 3) = 0.8413, \quad P(X < 9) = 0.9772$$