ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (GRUPO A)
CURSO 2015-2016
HOJA 7

1. Determina la solución general, clasifica los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases de los siguientes sistemas lineales planos:

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5y - 2x \end{cases}$

2. Determina la solución general, clasifica los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases del sistema lineal plano $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ en los siguientes casos:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. Clasifica el origen como punto de equilibrio del sistema lineal plano

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

4. Representa el diagrama de fases del sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ si los autovalores y autovectores de la matriz $\mathbf{A}$ son:

a) $\lambda = 1, \mathbf{u} = (1,1)$ y $\mu = 2, \mathbf{v} = (1,-1)$
b) $\lambda = 1, \mathbf{u} = (1,0)$ y $\mu = -2, \mathbf{v} = (1,1)$
c) $\lambda = 3, \mathbf{u} = (1,2)$ y $\mu = 1, \mathbf{v} = (1,-3)$
d) $\lambda = -3, \mathbf{u} = (1,3)$ y $\mu = -1, \mathbf{v} = (-3,2)$

5. Clasifica los sistemas lineales planos $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ sin calcular los autovalores de $\mathbf{A}$ cuando:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Calcula la transformada de Laplace de la función $[x]$ (parte entera de x).

7. Expresa mediante la función de Heaviside y calcula la transformada de Laplace de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

8. Calcula la transformada de Laplace de las funciones siguientes:

a) $f(x) = e^x \operatorname{sen}^2 2x$

b) $g(x) = e^{3x} \cos 3x \cos 4x$

c) $h(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2 \cos 2t \, dt$

d) $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

9. Sabiendo que

$$\mathcal{L}[e^x f(x)] = \frac{1}{s^2 - 2s + 2},$$

calcula

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{3x} f(x)}{x}\right] \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}[x f(x)].$$

10. Halla la función f cuya transformada de Laplace es la función

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}.$$

11. Calcula la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s^2 + a^2)^2}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

12. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

a) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \chi_{[0,1)}(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''' - y'' = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy'' - 4y' - xy = -6xe^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y'' + 9y = \operatorname{sen} x \chi_{[0,4]}(x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x' + y' - y = t \\ x' + y' = t^2 \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$

h) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -37t \end{pmatrix}, \qquad y(0) = (0,0)$

i) $\begin{cases} x' + 2y' + x + y + z = 0 \\ x' + y' + x + z = 0 \\ z' - 2y' - y = 0 \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1, \quad z(0) = -2$

j) $\begin{cases} x'' + x - y = 0 \\ y'' + y - x = 0 \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0, \quad x'(0) = -2, \quad y'(0) = 1$

13. Halla la solución particular de la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' + xy = \operatorname{sen} x$$

que verifica $y(0) = 0$.

14. Resuelve la ecuación integral

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} x + 2 \int_0^x \cos(x-t) f(t) \, dt.$$