ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS
DE TELECOMUNICACIÓN

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA LINEAL

Colección elaborada por
PEDRO JOSÉ HERNANDO OTER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Índice

Este documento esta realizado con la versión de MikTeX 2.9.
Pedro José Hernando Oter - Septiembre 2016 - v2.0 - pedroj@math.uc3m.es

0 Temas de Repaso

0.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 0.1 Encontrar la ecuación de la recta en el plano euclídeo que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(-1, 3)$ en las formas: general, paramétrica, vectorial y normal. Dar su pendiente, su vector director y su vector normal.

Ejercicio 0.2 Encontrar la ecuación de la recta en el espacio euclídeo que pasa por los puntos $(1, 1, 0)$ y $(-2, 0, 1)$ en las formas: general, paramétrica, vectorial y normal. Dar su pendiente, su vector director y dos vectores normales.

Ejercicio 0.3 Encontrar la ecuación del plano en el espacio euclídeo que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$ y $(0, 1, -1)$ en las formas: general, paramétrica, vectorial y normal. Dar dos vectores contenidos en el plano y un vector normal al mismo.

Ejercicio 0.4 En los siguientes casos, encontrar una ecuación de la recta que pasa a través del punto P con vector director $\vec{d}$, en forma *vectorial* y en forma *paramétrica*.

a) $P = (-4, 4) \ , \ \vec{d} = [1, 1]$ en $\mathbb{R}^2$ **b)** $P = (0, 0, 0) \ , \ \vec{d} = [1, -1, 4]$ en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 0.5 En los siguientes casos, encontrar una ecuación de la recta que pasa a través del punto P con vectores normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, en forma normal y en forma general.

a) $P = (0, 0), \ \vec{n}_1 = [3, 2]$ en $\mathbb{R}^2$
b) $P = (-3, 5, 1), \ \vec{n}_1 = [1, -1, 5], \ \vec{n}_2 = [1, 2, 3]$ en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 0.6 Sea la recta ℓ que pasa a través del punto $Q = (1, -1, 1)$ y tiene por vector director $\vec{d} = [2, 3, -1]$. Para cada uno de los siguientes planos $\mathcal{P}$ determinar si ℓ y $\mathcal{P}$ son secantes en un punto (perpendiculares o no) o paralelos (contenida la recta en el plano o no).

a) $\mathcal{P}: \ 2x + 3y - z = 1$ **b)** $\mathcal{P}: \ x - y - z = 1$ **c)** $\mathcal{P}: \ 8x - 2y - 10z = 3$

Ejercicio 0.7 Elegir un método apropiado, (reducción, sustitución, igualación o Cramer), para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z = & 4 \\ x & + & y & + & z = & 2 \\ x & - & y & - & z = & 0 \end{array}\right\} x, y, z \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 0.8 Analizar el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, dando las soluciones en los casos compatibles.

$$\left\{\begin{array}{rcl} mx + y & = & 1 \\ 2x + y & = & 1 \end{array}\right.$$

0.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 0.9 En los siguientes casos, encontrar la ecuación pedida con los datos dados.

a) Ec. del plano en forma normal y general. **Datos** : $P = (0, 1, 0) \ , \ \vec{n} = [3, 2, 1]$.
b) Ec. vectorial y paramétrica del plano. **Datos** : $P = (6, -4, -3) \ , \ \vec{u} = [0, 1, 1] \ , \ \vec{v} = [-1, 1, 1]$
c) Ec. general del plano **Datos** : $P = (1, -1, 1) \ , \ Q = (4, 0, 2) \ , \ R = (0, 1, -1)$
d) Ec. paramétrica y vectorial de la recta en $\mathbb{R}^2$. **Datos** : $y = 3x - 1$

Ejercicio 0.10 Sea el plano $\mathcal{M}$ de ecuación $4x-y+5z=0$. Para los casos del **Ejercicio 0.6**, determinar si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{P}$ son paralelos, perpendiculares o ninguna de las dos cosas.

Ejercicio 0.11 En el siguiente sistema de $\mathbb{R}^3$ determinar la ecuación de la recta en forma paramétrica, solución de la intersección de los siguientes planos.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x+2y+z & = & -1 \\ 3x-y+4z & = & 5 \end{array} \right.$$

Ejercicio 0.12 Determinar si las siguientes rectas de $\mathbb{R}^3$ se intersectan, y en caso afirmativo, encontrar el o los puntos de intersección.

a) $\left\{ \begin{array}{lcl} [x,y,z]=[-1,2,1] & + & t[1,2,-1] \\ [x,y,z]=[2,2,0] & + & s[-1,1,0] \end{array} \right.$ **b)** $\left\{ \begin{array}{lcl} [x,y,z]=[3,1,0] & + & t[1,0,1] \\ [x,y,z]=[-1,1,-1] & + & s[2,3,1] \end{array} \right.$

Ejercicio 0.13 Determinar, en caso de que exista, la intersección de las siguientes rectas con el plano $x+y+z=1$ en $\mathbb{R}^3$.

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ x-y-z & = & 2 \end{array} \right.$ **b)** $[x,y,z]=[1,0,0]+t[1,-1,1]$ **c)** $\left\{ \begin{array}{l} [1,-1,0]\cdot([x,y,z]-[1,0,1])=0 \\ [-1,1,1]\cdot([x,y,z]-[0,1,1])=0 \end{array} \right.$

Ejercicio 0.14 Analizar el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, dando las soluciones en los casos compatibles.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mx+y+z & = & 2 \\ x+y+z & = & 1 \\ -2y+z & = & 0 \end{array} \right.$$

1 Números Complejos

1.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 1.1 Efectuar las siguientes operaciones con números complejos, simplificando el resultado.

a) $[(1-2i)-(-1+i)](2+i)$ **b)** $\overline{\overline{1+3i}+2i}+1$ **c)** $\dfrac{1+2i}{1-i}+\left(1-i^{11}\right)^{-2}$

Ejercicio 1.2 ¿Cuánto ha de valer $x \in \mathbb{R}$ para que $(2+xi)^2$ sea imaginario puro?

Ejercicio 1.3 Representar gráficamente en el plano complejo los siguientes conceptos de los números imaginarios:

a) Conjugado, opuesto e inverso de $z=a+bi$

b) Conjugado, opuesto e inverso de $z=\rho_\theta$

Ejercicio 1.4 Simplificar las siguientes expresiones de números complejos, mostrando el resultado final en las formas: binómica $a+ib$, polar ρ_θ, trigonométrica $\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ y exponencial $\rho e^{i\theta}$.

a) $(1+i)^{20}$ **b)** $1+\sqrt{3}_{\frac{\pi}{2}}$ **c)** $1_\pi-1-e^{-i\pi/4}$

Ejercicio 1.5 Calcular el módulo, argumento, argumento principal y conjugado de los siguientes números complejos:

a) 2 **b)** $-3 - i\sqrt{3}$ **c)** $2_{\frac{\pi}{3}}$ **d)** $-3e^{-5i}$

Ejercicio 1.6 Determinar todos los números reales x, y que satisfacen:

a) $x + iy = x - iy$ **b)** $x + iy = |x + iy|$ **c)** $\dfrac{1+i}{1-i} = xe^{iy}$

Ejercicio 1.7 Para cualquier $z, w \in \mathbb{C}$ con $z = \rho_\theta$, demostrar las siguientes propiedades.

a) $|zw| = |z|\,|w|$ **b)** $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ **c)** $iz = \rho_{\theta+\frac{\pi}{2}}$

Ejercicio 1.8 En caso de ser posible, encontrar y representar gráficamente en el plano complejo los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen:

a) $z < 1$ **b)** $|z| < 1$ **c)** $z + \overline{z} = 1$ **d)** $1 + e^z = i$

Ejercicio 1.9 Determinar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 = 1$ **b)** $z^2 + 2z = -1 + \dfrac{i}{2}$ **c)** $\log z = e + i\pi$

1.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 1.10 Efectuar las siguientes operaciones con números complejos, simplificando el resultado.

a) $1 + i + (-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$ **b)** $\dfrac{(-3i)^2\left(1 - 2i^{99}\right)}{2 + 2i}$ **c)** $\overline{\overline{(1+i)}(1+i)/(1+i)}$

Ejercicio 1.11 Hallar dos números complejos tales que su suma sea $1+4i$, su cociente sea un imaginario puro y siendo -1 la parte real del complejo del numerador en dicho cociente.

Ejercicio 1.12 Encontrar el polinomio de segundo grado $P(x) = 3x^2 + bx + c$ cuyas raíces son $5 \pm 2i$.

Ejercicio 1.13 Representar gráficamente en el plano complejo el resultado de la suma, resta, multiplicación y división de los números complejos:

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 i = \rho_\theta \\ z_2 = a_2 + b_2 i = \kappa_\alpha \end{cases}$$

Ejercicio 1.14 Simplificar las siguientes expresiones de números complejos, mostrando el resultado final en las formas: binómica $a + ib$, polar ρ_θ, trigonométrica $\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y exponencial $\rho e^{i\theta}$.

a) $1 + i + i^2 + i^3$ **b)** $(1 + i\sqrt{3})(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2})$ **c)** i^{-1} **d)** $\dfrac{1+i}{1-i}$

e) $i^{51} + i^{7248}$ **f)** $1 + 1_0 + 1_\pi$ **g)** $i + e^{2\pi i}$ **h)** $e^{\pi i}(1 - e^{-\pi i/3})$

Ejercicio 1.15 Calcular el módulo, argumento, argumento principal y conjugado de los siguientes números complejos:

a) 1 **b)** $2i$ **c)** $3_{11\pi/6}$ **d)** $-4e^{5\pi i/4}$

e) $-3+i\sqrt{3}$ **f)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ **g)** $(-1-i)^4$ **h)** $2e^{-5i}$

Ejercicio 1.16 Determinar todos los números reales x, y que satisfacen:

a) $(x+iy)^2=(x-iy)^2$ **b)** $|x+iy|=|x-iy|$ **c)** $\dfrac{x+iy}{x-iy}=x-iy$ **d)** $e^{x+iy}=-1$

Ejercicio 1.17 Para cualquier $z, w \in \mathbb{C}$, con $z=\rho_\theta$, demostrar las siguientes propiedades.

a) $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$ **b)** $-z=\rho_{\theta+\pi}$

c) $z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $(z\neq 0)$ **d)** $|z^{-1}|=\dfrac{1}{|z|}$, $(z\neq 0)$

Ejercicio 1.18 En caso de ser posible, encontrar y representar gráficamente en el plano complejo los $z\in\mathbb{C}$ que satisfacen:

a) $z^2+z>1$ **b)** $|z+i|>3$ **c)** $\dfrac{\overline{z}}{z}=i$

Ejercicio 1.19 Esbozar en el plano complejo la siguiente función compleja de variable real.

$$z(t)=te^{ti} \quad ; \quad t\in[0,2\pi]$$

Ejercicio 1.20 Determinar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^5-i=1$ **b)** $(1+i)z^2+iz+1-i=0$ **c)** $e^{3iz-1}=1$ **d)** $\cos z=i$

2 Sistemas de Ecuaciones Lineales

2.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 2.1 Encontrar un ejemplo numérico de los siguientes sistemas de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$:
a) Tres planos con intersección común en un único punto.
b) Tres planos que tengan una recta de intersección común.
c) Tres planos que se intersectan a pares, sin ningún punto común.
d) Tres planos, siendo dos paralelos y uno secante a ambos.

Ejercicio 2.2 Obtener las soluciones de los siguientes sistemas en $\mathbb{R}^n$, identificando: el espacio donde se encuentra, la dimensión y tipo del objeto geométrico que representa cada una de las ecuaciones del sistema y dimensión y tipo del objeto geométrico que representa la solución.

a) $\left.\begin{array}{rcl} x-y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^2$

b) $\left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1 \\ x-y & = & 2 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$

c) $x=2$ en $\mathbb{R}^4$

d) $\left.\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ x-y+z-w & = & 1 \\ x & = & 0 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^4$

Ejercicio 2.3 Resolver los siguientes sistemas triangulares utilizando el método de sustitución hacia atrás.

a) $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & -1 \\ -y+z & = & 2 \\ z & = & 1 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$

b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$

c) $\{x+y-z=1\}$ en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 2.4 Utilizar operaciones elementales de fila para reducir las siguientes matrices a una forma escalonada equivalente y a su forma escalonada reducida equivalente.

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 2.5 Encontrar la operación elemental de fila que deshace cada una de las siguientes operaciones elementales de fila.

a) $F_i \leftrightarrow F_j$ **b)** kF_i **c)** $F_i + kF_j$

Ejercicio 2.6 Comprobar que las matrices reales A y B dadas son equivalentes por filas, demostrando que poseen la misma matriz escalonada reducida equivalente y encontrar una secuencia de operaciones elementales de fila que convierta A en B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.7 Dadas las siguientes matrices ampliadas, determinar por inspección, (cálculos simples *de cabeza*), si un sistema lineal con la matriz ampliada dada, tiene solución única (compatible determinado), un número infinito de soluciones (compatible indeterminado) o no tiene solución (incompatible).

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right]$

Ejercicio 2.8 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales reales mediante el método de Gauss y mediante el método de Gauss-Jordan.

a) $\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -1 \\ -2x & - & y & = & 0 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^2$

b) $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$

c) $\left.\begin{array}{rcl} x+2y-3z+5w & = & 2 \\ -x-5z+w & = & 0 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^4$

d) $\left.\begin{array}{rcrcr} 2r & + & s & = & 3 \\ 4r & + & s & = & 7 \\ 2r & + & 5s & = & -1 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^2$

Ejercicio 2.9 Utilizando el método de Gauss, analizar el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$, encontrando las soluciones en los casos compatibles.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & 1 \\ kx & + & y & + & z & = & -2 \end{array} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

2.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 2.10 Encontrar un ejemplo numérico de los siguientes sistemas de ecuaciones en $\mathbb{R}^3$:

a) Dos planos paralelos y una recta secante a ellos.
b) Dos rectas paralelas y otra recta secante a las dos primeras.
c) Dos planos y una recta con intersección común en un punto.
d) Dos planos y una recta con intersección común en una recta.

Ejercicio 2.11 Un sistema con más ecuaciones que incógnitas se denomina *sobredeterminado*, mientras que uno con más incógnitas que ecuaciones se denomina *infradeterminado*. ¿Existen sistemas sobredeterminados y/o infradeterminados compatibles determinados? Razonar las respuestas y proporcionar si es posible un ejemplo en cada caso.

Ejercicio 2.12 Determinar el tipo (rectas, planos o hiperplanos) y dimensión de las posibles soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales reales, (x, y, z y w representan incógnitas y el resto constantes).

a) $$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \end{array} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

b) $$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \end{array} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^4$$

c) $$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ x + y & = & 0 \\ a_3x + b_3y & = & d_3 \\ a_4x + b_4y & = & d_4 \end{array} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^2$$

d) $$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + w & = & 1 \\ x + cy + z + w & = & k \\ 2x + y + z + sw & = & 0 \end{array} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 2.13 Obtener las soluciones de los siguientes sistemas en $\mathbb{R}^n$, identificando el tipo de solución (punto, recta, plano o hiperplano), su dimensión y la dimensión del espacio donde se encuentra.

a) $$\left. \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \end{array} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^5$$

b) $$\left. \begin{array}{rcr} x + y + z & = & 0 \\ x - y - z & = & 0 \\ x - y & = & 1 \\ 3x + y + z & = & 0 \\ x - y - 2z & = & -1 \end{array} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

c) $x + y + z + w = 2 \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^4$

d) $$\left. \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ x + y & = & 1 \\ x + y + z - w & = & 0 \end{array} \right\} \text{ en } \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 2.14 Utilizar operaciones elementales de fila para reducir las siguientes matrices a una forma escalonada equivalente y a su forma escalonada reducida equivalente.

a) $$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ -3 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.15 Descubrir cual es el error en la siguiente *demostración* de que toda matriz con al menos dos filas F_1 y F_2, es equivalente por filas a una matriz con una fila de ceros.

"Realizar $F_1 = F_1 + F_2$ y $F_2 = F_2 + F_1$. Ahora las filas 1 y 2 son iguales. Realizando $F_2 = F_2 - F_1$ se obtiene una fila de ceros".

Ejercicio 2.16 Determinar todas las posibles formas escalonadas equivalentes y escalonadas reducidas equivalentes de las matrices 3×3 no nulas.

Ejercicio 2.17 Sea un sistema de ecuaciones lineales formado por una matriz de coeficientes 3×5 que tiene tres columnas pivote en su forma escalonada equivalente. Razonar si dicho sistema puede ser compatible.

Ejercicio 2.18 Determinar si los siguientes sistemas son incompatibles o compatibles (determinados o indeterminados), aplicando para ello el teorema de Rouché-Fröbenius o del rango.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ **c)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ **e)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ **f)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Ejercicio 2.19 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales reales mediante el método de Gauss y mediante el método de Gauss-Jordan.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ 3x & + & y & + & 7z & = & 2 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$ **b)** $\left\{\begin{array}{rcr} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 & = & -3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 & = & 2 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^4$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ -x & - & y & - & z & = & -6 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & -4 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$ **d)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2a & + & b & - & 3c & = & -7 \\ -a & - & 2b & + & 3c & = & 2 \\ 3a & + & 3b & + & 3c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & -4 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} w & + & x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ w & - & x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & x & + & y & & & = & -1 \\ w & + & x & & & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^4$ **f)** $\left\{\begin{array}{rcr} \sqrt{2}x + y + 2z & = & 1 \\ \sqrt{2}y - 3z & = & -\sqrt{2} \\ -y + \sqrt{2}z & = & 1 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 2.20 Utilizando el método de Gauss, analizar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$, encontrando las soluciones en los casos compatibles.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & ky & = & 1 \\ kx & + & y & = & 1 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^2$ **b)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & k \\ 2x & - & y & + & 4z & = & k^2 \end{array}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 2.21 Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. (Por razonar se entiende citar teoremas, resultados apropiados, proporcionar contraejemplos en el caso falso, etc.)

1. Si una matriz B se obtiene de otra matriz A mediante operaciones elementales de fila, entonces A puede obtenerse de B mediante operaciones elementales de fila.
2. Si las matrices ampliadas de dos sistemas de ecuaciones son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto de soluciones.
3. Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene como máximo n soluciones.
4. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene dos soluciones diferentes, entonces tiene infinitas soluciones diferentes.
5. Si una solución de un sistema de ecuaciones lineales no tiene variables libres (parámetros) entonces tiene una única solución.
6. Si todas las columnas de la matriz de coeficientes de un sistema compatible son columnas pivote, entonces la solución del sistema es única.
7. Un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones <u>si y sólo si</u> al menos una columna en la matriz de coeficientes no contiene una posición pivote.
8. Un sistema <u>compatible</u> de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones <u>si y sólo si</u> al menos una columna en la matriz de coeficientes no contiene una posición pivote.
9. Un sistema incompatible de ecuaciones lineales tiene, algunas veces, una única solución.
10. Una matriz 5×7 no puede tener una posición pivote en cada fila.
11. Una matriz 6×5 no puede tener una posición pivote en cada fila.

3 Espacios Vectoriales

3.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 3.1 En los siguientes apartados, encontrar si existen dos vectores linealmente dependientes y otros dos linealmente independientes del conjunto de vectores $U = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \subset \mathbb{R}^n$.

a) $\vec{u} = [1,0],\ \vec{v} = [-1,0],\ \vec{w} = [2,0] \in \mathbb{R}^2$. **b)** $\vec{u} = [1,0,0],\ \vec{v} = [1,1,0],\ \vec{w} = [0,1,0] \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.2 En los siguientes casos, determinar si el conjunto de vectores U es un conjunto generador del correspondiente espacio $\mathbb{R}^n$. Determinar su rango y especificar cual de ellos es además una base de dicho espacio.

a) $U = \{[1,0],[-1,0]\} \subset \mathbb{R}^2$.
b) $U = \{[1,0],[-1,0],[-2,0],[1,-1]\} \subset \mathbb{R}^2$.
c) $U = \{[1,1,1],[1,1,-1],[1,0,0]\} \subset \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 3.3 Justificar de forma razonada porqué el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Dar ejemplos, si existen, de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ de dimensiones 0, 1, 2, 3 y 4.

Ejercicio 3.4 Determinar si los siguientes sistemas de vectores S_i son subespacios vectoriales bien definidos de los correspondientes espacios $\mathbb{R}^n$ dados.

a) $S_1 = \{[0,0],[1,0],[0,1]\}$ de $\mathbb{R}^2$ **b)** $S_2 = \{x+y+z=1\}$ de $\mathbb{R}^3$ **c)** $S_3 = \{x_1 = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$

d) $S_4 = \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = t+s \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$ de $\mathbb{R}^4$, (t, s parámetros) **e)** $S_5 = \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 + x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right\}$ de $\mathbb{R}^4$

Ejercicio 3.5 En los siguientes subespacios vectoriales S_i de $\mathbb{R}^n$, encontrar un vector linealmente dependiente y un vector linealmente independiente, un conjunto generador, una base y el rango del sistema.

a) $S_1 = \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_1 - x_2 & = & 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^4$ **b)** $S_2 = \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t+s \\ y & = & -t \\ z & = & 0 \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^3, \quad \text{con } t, s \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3.6 En $\mathbb{R}^3$, encontrar la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$, dibujando el resultado.

$$\vec{u} = [1, -1, -1] \qquad ; \qquad \vec{v} = [1, 1, 1]$$

Ejercicio 3.7 Utilizando el concepto de proyección ortogonal, determinar la distancia que hay entre los siguientes objetos geométricos.

a) Dos rectas paralelas: $\ell_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \ell_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

b) Punto $A = (0, 0, 0)$ y el plano: $x - 2y + 2z = 1$.

3.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 3.8 En los siguientes sistemas de vectores S_i de $\mathbb{R}^n$ y siempre que sea posible, encontrar un vector linealmente dependiente, un vector linealmente independiente, un conjunto generador y una base de S_i.

a) $S_1 = \{[1, 0, 1], [1, 1, 1]\} \in \mathbb{R}^3$ **b)** $S_2 = \{[1, 0, 1, -1], [1, 1, 1, 1], [1, 3, 1, 5]\} \in \mathbb{R}^4$

c) $S_3 = \{[x, y, z] : x + y + z = 1\} \in \mathbb{R}^3$ **d)** $S_4 = \left\{ [x_1, x_2, x_3, x_4] : \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \right\} \in \mathbb{R}^4$

Ejercicio 3.9 Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes, calculando su rango.

a) $S_1 = \{[1, 3], [-1, 2]\}$

b) $S_2 = \{[1, 3, 2], [1, 2, -1], [1, 5, 8]\}$

c) $S_3 = \{[1, 0, 1, 1, 1], [0, -1, 1, -1, 1], [1, 1, 0, 2, 0], [3, 2, 1, 5, 1]\}$

Ejercicio 3.10 Encontrar los subespacios vectoriales generados por los sistemas de vectores del **Ejercicio 3.9**.

Ejercicio 3.11 Encontrar, en caso de ser posible, un conjunto generador y una base (ambos distintos) de los siguientes sistemas de vectores.

a) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$ en $\mathbb{R}^3$

b) $x + y - z = 0$ en $\mathbb{R}^3$

c) $x + y - z = 0$ en $\mathbb{R}^5$

Ejercicio 3.12 En los siguientes casos determinar: $\|\vec{u}\|$, un vector unitario en la dirección de $\vec{u}$, el valor de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y la distancia $d(\vec{u}, \vec{v})$:

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ **b)** $\left. \begin{array}{rcl} \vec{u} & = & [1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0] \\ \vec{v} & = & [4, -\sqrt{2}, 0, -5] \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^4$

Ejercicio 3.13 Encontrar el ángulo entre los vectores de $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ en los siguientes casos:

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3.14 Encontrar todos los posibles valores del escalar $k \in \mathbb{R}$ que hacen que los vectores $\vec{v} = [k, 1, 1]$ y $\vec{u} = [-1, 1, k^2]$ de $\mathbb{R}^3$, sean ortogonales.

Ejercicio 3.15 Encontrar la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$, dibujando el resultado si es posible.

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ **b)** $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

Ejercicio 3.16 ¿Bajo qué condiciones se cumple lo siguiente para los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$?

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ **b)** $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$

Ejercicio 3.17 Supongamos que sabemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$. ¿Esto implica que $\vec{v} = \vec{w}$? Si es así, proporcionar una demostración que sea válida en $\mathbb{R}^n$; de otra forma, ofrecer un contraejemplo (es decir, un conjunto específico de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para los cuales $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ pero $\vec{v} \neq \vec{w}$).

Ejercicio 3.18 Utilizando el concepto de proyección ortogonal, determinar la distancia que hay entre los siguientes objetos geométricos.

a) Punto $Q = (0, 1, 0)$ y la recta $\ell : \ [x, y, z] = [1, 1, 1] + t[-1, 0, 1]$.

b) Dos rectas paralelas: $\ell_1 : \ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \ell_2 : \ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

c) Punto $Q = (2, 2, 2)$ y el plano $\mathcal{M} : \ x + y - z = 0$.

d) Dos planos paralelos: $\mathcal{M}_1 : \ 2x + y - 2z = 1 \quad ; \quad \mathcal{M}_2 : \ 2x + y - 2z = 0$.

Ejercicio 3.19 Demostrar las siguientes expresiones $\forall \ \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$:

a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$

b) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

c) Un vector $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v} - \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$, con $\vec{u} \neq \vec{0}$.

d) $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v} - \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})) = \vec{0}$

4 Matrices

4.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 4.1 En caso de ser posible, calcular los siguientes productos matriciales:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4.2 Encontrar un ejemplo de una matriz no nula $A_{2\times 2}$ tal que, $A^2 = 0_{2\times 2}$.

Ejercicio 4.3 Dados los vectores $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{bmatrix}$.

a) Calcular $u^T v$, $v^T u$, uv^T y vu^T.

b) Si $u, v \in \mathbb{R}^n$, ¿cuál es la relación entre $u^T v$ y $v^T u$? ¿Y entre uv^T y vu^T?

Ejercicio 4.4 Dadas dos matrices invertibles $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, determinar si las siguientes fórmulas son ciertas o falsas.

a) $(I - A)(I + A) = I - A^2$ **b)** $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ejercicio 4.5 Sea $A = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$. Verificar que $AA^T = I$. ¿Es A invertible? ¿Por qué?

Ejercicio 4.6 Utilizando las propiedades de los determinantes, evaluar por inspección el valor de los siguientes determinantes, explicando su razonamiento.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **g)** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **h)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 4.7 Sabiendo que $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y que $|A| = 3$ y $|B| = -2$, encontrar los determinantes indicados en los siguientes casos:

a) $|AB|$ **b)** $|B^{-1}A|$ **c)** $|2A|$ **d)** $|3B^T|$

Ejercicio 4.8 Utilizar el método de Gauss para encontrar, en caso de que exista, el determinante y la inversa de la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.9 Determinar bases para $\mathrm{fil}(A)$, $\mathrm{col}(A)$ y $\ker(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.10 Determinar si $\vec{b}$ está en $\mathrm{col}(A)$ y si $\vec{w}$ está en $\mathrm{fil}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.11 Encontrar una base para el espacio generado por el siguiente sistema de vectores.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

4.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 4.12 En caso de ser posible, calcular los siguientes productos matriciales

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4.13 Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, encontrar todas las matrices reales $B_{2\times2}$, tal que $AB = 0_{2\times2}$.

Ejercicio 4.14 Sean el vector columna estándar $e_j \in \mathbb{R}^n$ y una matriz genérica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Describir el resultado de los productos siguientes:

a) Ae_j **b)** $e_j^T A$ **c)** $e_i^T A e_j$

Ejercicio 4.15 Dadas dos matrices invertibles $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, determinar cuál de las siguientes fórmulas son ciertas o falsas.

a) A^2 es invertible y $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$
b) $A + B$ es invertible y $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
c) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$
d) $(I + A)(I + A^{-1}) = 2I + A + A^{-1}$
e) $ABB^{-1}A^{-1} = I$
f) $ABA^{-1} = B$
g) $(ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$
h) $A^{-1}B$ es invertible y $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$

Ejercicio 4.16 Sabiendo el valor del siguiente determinante, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$

encontrar el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$

Ejercicio 4.17 Utilizar el método de Gauss para encontrar, en caso de que exista, el determinante y la inversa de las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4.18 Se dice que dos matrices A y B son equivalentes por filas y se representa por $A \sim B$, si una se puede obtener de la otra a través de un número finito de operaciones elementales de fila. Dadas las matrices $A_{n\times n}$ y $B_{n\times p}$, explicar por qué si $[A|B] \sim \cdots \sim [I|X]$ entonces $X = A^{-1}B$.

Ejercicio 4.19 En los siguientes casos donde todas las matrices son invertibles, resolver la ecuación matricial dada para X simplificando el resultado.

a) $XA^2 = A^{-1}$ **b)** $AXB = (BA)^2$ **c)** $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$ **d)** $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$

Ejercicio 4.20 Determinar en los siguiente casos, bases para $\text{fil}(A)$, $\text{col}(A)$ y $\ker(A)$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4.21 Determinar si $\vec{b}$ está en $\text{col}(A)$ y si $\vec{w}$ está en $\text{fil}(A)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4.22 En los siguientes casos, determinar si los vectores dados forman una base del correspondiente espacio $\mathbb{K}$.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{K} = \mathbb{R}^3$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{K} = \mathbb{R}^3$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{K} = \mathbb{R}^4$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{K} = \mathbb{R}^4$

Ejercicio 4.23 Encontrar una base para el espacio generado por el siguiente sistema de vectores.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicio 4.24 Determinar los siguientes conceptos relativos a la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Rango y determinante de A.

b) Bases del espacio fila y columna.

c) Espacio fila en su forma vectorial y espacio columna en su forma general.

d) Base del espacio nulo.

e) Núcleo y nulidad de A.

Ejercicio 4.25

a) Sea $A = [\vec{c}_1\ \vec{c}_2\ \vec{c}_3\ \vec{c}_4]$ una matriz 3×4, con columnas $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$, $\vec{c}_4$, y sea

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

una matriz equivalente por filas de A. ¿Forman las filas de B una base del espacio fila de A?

b) Proporcionar una posible base del espacio columna de la matriz A del apartado anterior.

5 Transformaciones Lineales

5.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 5.1 Definir el concepto de *transformación lineal*.

Ejercicio 5.2 Justificar si las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ son transformaciones lineales o no.

a) $\begin{cases} y_1 &= 2x_2 \\ y_2 &= x_2 + 2 \\ y_3 &= 2x_2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y_1 &= 2x_2 \\ y_2 &= 3x_3 \\ y_3 &= x_1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y_1 &= x_2 - x_3 \\ y_2 &= x_1x_3 \\ y_3 &= x_1 - x_2 \end{cases}$

Ejercicio 5.3 Encontrar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^m$.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$ **b)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -y \\ x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix}$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+z \\ 2x+y-3z \end{bmatrix}$ **d)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{bmatrix}$

Ejercicio 5.4 A partir de las propiedades mostradas, encontrar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales.

a) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} \quad ; \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \quad ; \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -13 \\ 17 \end{bmatrix}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ **c)** $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_n\vec{v}_n \quad ; \quad \vec{v}_i \in \mathbb{R}^m$

Ejercicio 5.5 Encontrar, en caso de que exista, la transformación inversa de la siguiente TL.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

Ejercicio 5.6 Dadas las transformaciones lineales $S(\vec{y}) = A\vec{y}$ y $T(\vec{x}) = B\vec{x}$, calcular la matriz asociada a la transformación $S \circ T$.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad S\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.7 Encontrar el espacio dominio, el espacio imagen, la imagen, el núcleo, la nulidad y el rango de la transformación lineal $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ definida a través de la siguiente matriz asociada. Comprobar con estos datos que se cumple el teorema del rango de las transformaciones lineales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.8 Determinar si las siguientes transformaciones lineales son inyectivas y/o sobreyectivas y en base a eso decidir cuales son isomorfismos.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}$ **b)** $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3 \quad , \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 3x + y \\ x + y \end{bmatrix}$

Ejercicio 5.9 Esquematizar la forma del circunferencia unidad bajo la transformación lineal:

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Ejercicio 5.10 Encontrar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

a) Proyección ortogonal de un vector cualquiera sobre la recta $y = -3x$.

b) Reflexión de un vector cualquiera sobre la recta $y = 2x$.

c) Proyección ortogonal de un vector cualquiera sobre la recta $y = -3x$ seguida de una eflexión sobre la recta $y = 2x$.

Ejercicio 5.11 Encontrar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$.

a) Proyección ortogonal de un vector sobre el plano $z = x + 2y$.

b) Reflexión de un vector sobre el plano $z = x - y$.

5.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 5.12 Clasificar las siguientes funciones reales $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como escalares o vectoriales y de una o de varias variables.

a)	$f(x) = x^2$	;	$x \in \mathbb{R}$
b)	$f(x) = \|\|x\|\|$	;	$x \in \mathbb{R}^2$
c)	$f(x, y) = [x + y, x - y, x^2]$	;	$x, y \in \mathbb{R}$
d)	$f(x, y) = x + y$	;	$x, y \in \mathbb{R}$
e)	$f(x, y) = [x \cdot y, \|\|y\|\|^2]$	;	$x, y \in \mathbb{R}^3$

Ejercicio 5.13 Demostrar que las siguientes transformaciones $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ **no** son lineales.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x^2 \end{bmatrix}$ **b)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} |x| \\ |y| \end{bmatrix}$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ x+y \end{bmatrix}$ **d)** $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5.14 Encontrar, en caso de que exista, la transformación inversa de las siguientes TL.

a) $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 6x_1 + 9x_2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 4x_1 + 9x_2 \end{cases}$

Ejercicio 5.15 Una agencia de espionaje capta las coordenadas codificadas $(89, 52)$ y $(88, 53)$. Sabiendo que pertenecen a las coordenadas reales $(5, 42)$ y $(6, 41)$ respectivamente, y que el código de codificación es una transformación lineal, determinar la clave de la codificación (matriz de la transformación).

Ejercicio 5.16 Dadas las transformaciones lineales $S(\vec{y}) = A\vec{y}$ y $T(\vec{x}) = B\vec{x}$, calcular la matriz asociada a la transformación $S \circ T$.

a) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + x_2 \end{bmatrix}$, $S\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 + 3y_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$

b) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$, $S\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 + 3y_2 \\ 2y_1 - y_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$

c) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{bmatrix}$, $S\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4y_1 - 2y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

d) $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_2 - x_3 \end{bmatrix}$, $S\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5.17 Encontrar el espacio dominio, el espacio imagen, el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de las transformaciones lineales $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ definidas a través de las siguientes matrices asociadas. En base a los resultados determinar si las TL son inyectivas, biyectivas y/o sobreyectivas.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5.18 Dadas las transformaciones lineales $S : Z \to Y$ y $T : X \to Z$, dar razonamientos lógicos para demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $S \circ T$ es sobreyectiva, también lo será S.

b) Si $\dim X > \dim Z$, entonces T no puede ser inyectiva.

c) Si $\dim X < \dim Z$, entonces T no puede ser sobreyectiva.

Ejercicio 5.19 Si R_θ denota una rotación (con respecto al origen) en un ángulo θ, demostrar que $R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}$.

Ejercicio 5.20 Encontrar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

a) Amplifica un vector de entrada $\vec{x} = [x_1, x_2]$ por un factor 2 en la componente x_1 y por un factor 3 en la componente x_2.

b) Proyección ortogonal de un vector sobre la recta $y = -x$.

c) Reflexión de un vector sobre la recta $y = -x$.

d) Reflexión de un vector sobre la recta $y = x$, seguida por una rotación de 30^o en la dirección contraria a las agujas del reloj, seguida de una reflexión en la recta $y = -x$.

Ejercicio 5.21 Encontrar la matriz asociada a las siguientes transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$.

a) Proyección ortogonal sobre el plano XY.

b) Reflexión en el plano $y = z$.

Ejercicio 5.22 Find the matrix associated to the following linear transformations from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$.

a) Orthogonal projection over the plane XY.

b) Reflection on the plane $y = z$.

6 Bases

6.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 6.1 Encontrar bases de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $W : \{x + y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
b) $W : \{x - y + z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
c) $W : \{x + y + z = 0,\ x - y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
d) $W = \text{gen}([1, 1, 0, 1],\ [-1, 0, 1, 1],\ [-1, -1, 1, 1]) \subseteq \mathbb{R}^4$

Ejercicio 6.2 Completar con los vectores necesarios para transformar el sistema de vectores:

$$S = \{[1, 0, 0, 0],\ [1, 1, -1, 0],\ [0, 1, -1, 0],\ [0, 0, 0, 1]\}$$

en una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 6.3 Encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ de forma que un vector esté en la recta $\{x-y+z = 0,\ 2x-2z = 0\}$ y otros dos en el plano $x + y + z = 0$.

Ejercicio 6.4 Dado el vector $\vec{x} = [2, 3]$ y las bases de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad ; \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se pide:

a) Encontrar los vectores de coordenadas $[\vec{x}]_\mathcal{B}$ y $[\vec{x}]_\mathcal{C}$.

b) Encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

c) Utilizar el resultado del apartado *b)* para calcular $[\vec{x}]_\mathcal{C}$ y comparar el resultado con el obtenido en el apartado *a)*.

d) Encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

e) Utilizar los resultado del apartado *d)* para calcular $[\vec{x}]_\mathcal{B}$ y comparar el resultado con el obtenido en el apartado *a)*.

Ejercicio 6.5 Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Se definen los vectores:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3 \quad ; \quad \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 \quad ; \quad \vec{v}_3 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \quad ; \quad \vec{v}_4 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_4$$

a) Probar que $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

b) Determinar si $\mathcal{B}'' = \{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \vec{w}_3,\ \vec{w}_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$, siendo:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad ; \quad \vec{w}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4 \quad ; \quad \vec{w}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3 \quad ; \quad \vec{w}_4 = \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4$$

c) Encontrar, en caso de ser posible, una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}'' = \{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \vec{w}_3,\ \vec{w}_4\}$ que genere una base de $\mathbb{R}^4$.

d) Encontrar las coordenadas en la base $\mathcal{B}'$ de un vector $\vec{s}$ que tiene por coordenadas $[1, 0, 0, 1]$ en la base $\mathcal{B}$.

6.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 6.6 Encontrar bases de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $W : \{x = 2t,\ y = t,\ z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
b) $W : \{x + y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
c) $W : \{x_1 + x_2 - x_4 = 0,\ x_2 - x_5 = 0,\ x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^6$
d) $W = \text{gen}([1, 0, 0, 1],\ [1, -1, -1, 0],\ [0, 1, 1, 1],\ [0, -1, 0, 0],\ [0, 0, 1, 1]) \subseteq \mathbb{R}^4$

Ejercicio 6.7 Probar las siguientes afirmaciones:

a) Los vectores $\mathcal{B} = \{[2, 1, 1],\ [1, 3, 1],\ [-2, 1, 3]\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Los vectores $\mathcal{C} = \{[1, 1, 0, 0],\ [1, 0, 1, 0],\ [1, 0, 0, 1]\}$ forman una base del subespacio vectorial $W : \{x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

c) Los vectores $\mathcal{D} = \{[1, 1, 1, 0],\ [1, 0, 0, 1]\}$ no forman una base del subespacio vectorial $W : \{x_1 - x_2 - x_4 = 0,\ x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 6.8 Completar el conjunto:

$$S = \{[1, 1, -1, 1],\ [1, 1, 0, 1],\ [1, 2, 1, 1]\}$$

para formar una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 6.9 Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ de forma que haya exactamente un único vector perteneciente al subespacio $W = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] :\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 6.10 Dado el vector $\vec{v} = [1, 1, 2, 1]$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, encontrar el vector de coordenadas de $\vec{v}$ en la base $\mathcal{B} = \{[1, 0, 1, 0], [1, -1, 0, 0], [1, 0, -1, 0], [1, 0, 0, 1]\}$.

Ejercicio 6.11 Sean $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3\}$ y $\mathcal{C} = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ tales que:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3 \\ \vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \end{cases}$$

a) Sea el vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ que en la base $\mathcal{C}$ tiene coordenadas $\vec{w} = [1, 2, 3]$. Calcular sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$.

a) Sea el vector $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ que en la base $\mathcal{B}$ tiene coordenadas $\vec{w} = [1, 2, 3]$. Calcular sus coordenadas en la base $\mathcal{C}$.

Ejercicio 6.12 Dado el vector $\vec{x} = [1, 0, -1]$ y las bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad ; \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Se pide:

(1) Encontrar los vectores de coordenadas $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ y $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$.

(2) Encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

(3) Utilizar el resultado del apartado (2) para calcular $[\vec{x}]_{\mathcal{C}}$ y comparar el resultado con el obtenido en el apartado (1).

(4) Encontrar la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

(5) Utilizar los resultado del apartado (4) para calcular $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ y comparar el resultado con el obtenido en el apartado (1).

Ejercicio 6.13 Encontrar el vector de coordenadas de la solución del siguiente SEL, respecto de la base $\mathcal{B} = \{[-1, -2, -1, 2], [0, 2, 1, -1]\}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z + w & = & 0 \\ -x - z - w & = & 0 \end{array} \right.$$

7 Ortogonalidad

7.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 7.1 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales.

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ **b)** $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Ejercicio 7.2 Encontrar una base, una base ortogonal y una base ortonormal, (las tres distintias), del subespacio $W \subseteq \mathbb{K}^n$ siguiente:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ r \end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - r & = & 0 \\ x - y + z + r & = & 0 \end{array} \right. \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Ejercicio 7.3 En los siguientes casos, determinar si la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal o no y expresar el vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$, obteniendo el correspondiente vector de coordenadas $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.

a) $\mathcal{B} = \{[1, 1], [2, 3]\}$, $\vec{x} = [-2, -3] \in \mathbb{R}^2$

b) $\mathcal{B} = \{[1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, -1], [0, 1, 1, 0], [0, -1, 1, 0]\}$, $\vec{x} = [1, 1, 0, 0] \in \mathbb{R}^2$

Ejercicio 7.4 Encontrar una base para el complemento ortogonal $W^{\perp}$ de los siguientes subespacios reales:

$$\textbf{a)}\quad W=\left\{\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix} \;:\; 2x-y=0\right\} \qquad\qquad \textbf{b)}\quad W=\left\{\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} \;:\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0\\ x-y-z=0\end{array}\right.\right\}$$

Ejercicio 7.5 Encontrar una base del $\ker(A^T)$ y de $\mathrm{Im}(A)$, dibujando la interpretación geométrica de la fórmula $(\mathrm{Im}(A))^{\perp}=\ker(A^T)$ en los siguientes casos:

$$\textbf{a)}\quad A=\begin{bmatrix} 2 & 4\\ 3 & 6\end{bmatrix} \qquad\qquad \textbf{b)}\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Ejercicio 7.6 Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la secuencia de vectores dadas en los siguientes casos, para encontrar un sistema ortogonal de vectores.

$$\textbf{a)}\quad \left\{\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ -2\end{bmatrix}\right\} \qquad \textbf{b)}\quad \left\{\begin{bmatrix} 1\\ 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1\\ 1\end{bmatrix}\right\} \qquad \textbf{c)}\quad \left\{\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\}$$

Ejercicio 7.7 Determinar la descomposición ortogonal de $\vec{v}$ con respecto al subespacio W.

$$\vec{v}=[4,-2,3], \qquad W=\mathrm{gen}([1,2,1],[1,-1,1])$$

Ejercicio 7.8 Encontrar la factorización QR de las siguientes matrices, teniendo en cuenta lo realizado en el **Ejercicio 7.6**.

$$\textbf{a)}\quad \begin{bmatrix} 2\\ 1\\ -2\end{bmatrix} \qquad\qquad \textbf{b)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

7.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 7.9 Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales.

$$\textbf{a)}\quad \begin{bmatrix} 4\\ 2\\ -5\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1\\ 2\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2\\ 1\\ 2\end{bmatrix}. \quad \textbf{b)}\quad \begin{bmatrix} 2\\ 3\\ -2\\ 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -2\\ 1\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -4\\ -6\\ 2\\ 7\end{bmatrix}. \quad \textbf{c)}\quad \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0\\ -1\\ 1\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7.10 En los siguientes casos, determinar si la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal o no y expresar el vector $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ como combinación lineal de los vectores de la base $\mathcal{B}$, obteniendo el correspondiente vector de coordenadas $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$.

a) $\mathcal{B}=\{[1,0,-1],[1,2,1],[1,-1,1]\}$, $\vec{x}=[1,1,1]\in\mathbb{R}^3$.

b) $\mathcal{B}=\{[1,-1,-1],[1,-1,1],[1,1,1]\}$, $\vec{x}=[6,0,5]\in\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 7.11 En los siguientes casos determinar si la matriz dada es ortogonal y en caso afirmativo comprobar que su transpuesta coincide con su inversa.

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{c)}\ A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 & 2/5 \\ 1/2 & -1/3 & 2/5 \\ -1/2 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{d)}\ \begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & -\operatorname{sen}^2\theta \\ \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7.12 In the following cases determine if the given matrix is orthogonal and if so, check that its transposed is its inverse.

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \textbf{c)}\ A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/3 & 2/5 \\ 1/2 & -1/3 & 2/5 \\ -1/2 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{d)}\ \begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & -\operatorname{sen}^2\theta \\ \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7.13 Determinar si puede existir una transformación lineal ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ que verifique:

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad T\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7.14 Encontrar una base cualquiera, una base ortogonal y una base ortonormal del subespacio W de $\mathbb{R}^4$ formado por todos los vectores ortogonales a $\vec{v} = [1, 1, 1, 1] \in \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 7.15 Encontrar una base para el complemento ortogonal $W^\perp$ de los siguientes subespacios reales:

$$\textbf{a)}\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y - z = 0 \right\}. \qquad \textbf{b)}\ W = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \right).$$

$$\textbf{c)}\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = t,\ y = -t,\ z = 3t \right\}. \qquad \textbf{d)}\ W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \left\{ \begin{array}{l} x = t - s \\ y = -t + s \\ z = 3t - 2s \end{array} \right. ;\ \forall t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejercicio 7.16 En los siguientes casos encontrar bases para los subespacios $\operatorname{fil}(A)$, $\operatorname{col}(A)$, $\ker(A)$ y $\ker(A^T)$ y verificar que todo vector de $\operatorname{fil}(A)$ es ortogonal a todo vector de $\ker(A)$ y que todo vector de $\operatorname{col}(A)$ es ortogonal a todo vector de $\ker(A^T)$.

$$\textbf{a)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7.17 En los siguientes casos, encontrar la proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ en el subespacio $W \subset \mathbb{R}^n$.

a) $\vec{v} = [49, 49, 49]$, $W = \text{gen}([2, 3, 6], [3, -6, 2]) \subset \mathbb{R}^3$.

b) $\vec{v} = [9, 9, 9, 9]$, $W = \text{gen}([2, 2, 1, 0], [-2, 2, 0, 1]) \subset \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 7.18 En los siguientes casos, determinar la descomposición ortogonal de $\vec{v}$ con respecto al subespacio W.

a) $\vec{v} = [2, -2]$, $\quad W = \text{gen}([1, 3])$.

b) $\vec{v} = [4, -2, 3]$, $\quad W = \text{gen}([1, 2, 1])$.

c) $\vec{v} = [2, 1, 5, 3]$, $\quad W = \text{gen}([1, -1, 1, 0], [0, 1, 1, 1])$.

Ejercicio 7.19 Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la secuencia de vectores dadas en los siguientes casos, para encontrar un sistema ortogonal de vectores.

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{e)}\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{f)}\ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \textbf{g)}\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{h)}\ \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 7.20 Encontrar la factorización QR de las siguientes matrices, teniendo en cuenta lo realizado en el problema anterior.

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 4 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & -25 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{e)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \\ 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{f)}\ \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} \quad \textbf{g)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{h)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

==

Ejercicio 7.21 Encontrar la factorización QR de las siguientes matrices M

$$\textbf{a)}\ M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \textbf{b)}\ M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8 Míminos Cuadrados

8.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 8.1 Encontrar la mejor aproximación del vector $\vec{v} = [1,2,3]$ en el subespacio vectorial $W : \{x+y-z=0,\ x-y-z=0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 8.2 Hallar el vector perteneciente al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores:

$$S = \{[1,0,-1,0],\ [0,1,-1,0],\ [-1,0,0,0]\}$$

que está más cerca del vector $\vec{v} = [1,1,1,1]$.

Ejercicio 8.3 Encontrar la solución de mínimos cuadrados $\vec{s}$ de los siguientes sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$, realizando, en caso de ser posible, una interpretación gráfica del mismo y calculando el error $\|\vec{b} - A\vec{s}\|$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\ \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Ejercicio 8.4 Utilizar la siguiente factorización QR de la matriz A para encontrar una solución por mínimos cuadrados de $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8.5 En los siguientes casos, realizar el ajuste por mínimos cuadrados del conjunto de datos P a la función $f(t)$, con a, b y c constantes a determinar. Calcular el error del ajuste y realizar una interpretación gráfica de la solución.

a) $P = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $f(t) = a + bt$.
b) $P = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $f(t) = a + bt + ct^2$.
c) $P = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $f(t) = bt$.
d) $P = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$, $f(t) = a$.

Ejercicio 8.6 Realizar el ajuste por mínimos cuadrados de los siguientes datos a la función $z = a + bx + cy^2$, calculando el error del mismo.

x	y	z
0	0	1
1	0	1
0	1	0
1	1	1

8.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 8.7 Encontrar la mejor aproximación del vector $\vec{v} = [1,0,1,0]$ en el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$W : \begin{cases} x_1 = t + s \\ x_2 = t - s \\ x_3 = t \\ x_4 = 2s \end{cases}$$

Ejercicio 8.8 Encontrar la solución de mínimos cuadrados $\vec{s}$ de los siguientes sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$ calcular el error $\|\vec{b} - A\vec{s}\|$. En caso de ser posible, dar una interpretación gráfica del problema.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **e)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **f)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8.9 Encontrar la solución de mínimos cuadrados de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales incompatibles, utilizando la factorización QR y comprobar que se obtiene el mismo resultado utilizando las ecuaciones normales.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8.10 En los siguientes casos, realizar el ajuste por mínimos cuadrados del conjunto de datos a la función dada, siendo a, b y c constantes a determinar. Calcular el error del ajuste y realizar una interpretación gráfica de la solución.

a)

t	0	1	-1	-1
$f(t)$	0	1	1	-1

; $f(t) = a + bt + ct^2$

b)

x	0	$\pi/2$	π	$-\pi$
y	0	$\pi/2$	π	$-\pi$

; $y = a + b\,\mathrm{sen}(x) + c\cos(x)$

c)

x	-1	0	1	1
y	0	1	0	1
z	1	0	1	-1

; $y = ax + by$

9 Autovalores y Autovectores

9.1 Ejercicios de Clase

Ejercicio 9.1 Mostrar que $\vec{v} = [1, 0, -1]$ es un autovector de la siguiente matriz A y encontrar el autovalor asociado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9.2 Mostrar que $\lambda = 2$ es un autovalor de la siguiente matriz A y encontrar un autovector asociado al mismo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9.3 Encontrar los autovalores, autovectores y autoespacios asociados de la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Ejercicio 9.4 Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular:

a) El polinomio y la ecuación característica de A.

b) Los autovalores de A.

c) Una base de cada uno de los autoespacios de A.

d) La multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica de cada autovalor.

e) Una diagonalización de A, en caso de ser posible.

f) Una diagonalización ortogonal de A, en caso de ser posible.

Ejercicio 9.5 Dada la siguiente diagonalización de la matriz A, listar sus autovalores y bases de los autoespacios correspondientes.

$$\begin{bmatrix} 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 5/8 & -3/8 & -3/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9.6 Determinar si la siguiente matriz es diagonalizable y, si lo es, encontrar una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9.7 Sea el vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ y la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con autovectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y autovalores asociados λ_1 y λ_2, dados por:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad \lambda_2 = 2$$

a) Encontrar el valor de $A^{10}\vec{x}$.

b) Encontrar $A^k\vec{x}$ y determinar su valor cuando $k \to \infty$.

c) Encontrar el valor de A^{100}.

Ejercicio 9.8 Con los siguientes datos, encontrar una matriz A con autovalores λ_1 y λ_2, y autovectores asociados $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

$$\lambda_1 = -1 \quad ; \quad \lambda_2 = 2 \quad ; \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

9.2 Ejercicios Propuestos

Ejercicio 9.9 En los siguientes casos, mostrar que $\vec{v}$ es un autovector de A y encontrar el autovalor correspondiente.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **e)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9.10 En los siguientes casos, mostrar que λ es un autovalor de A y encontrar un autovector asociado al mismo.

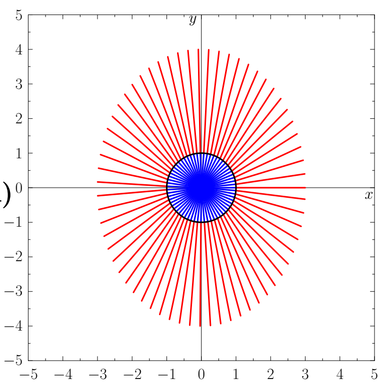
a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 3$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda = 4$

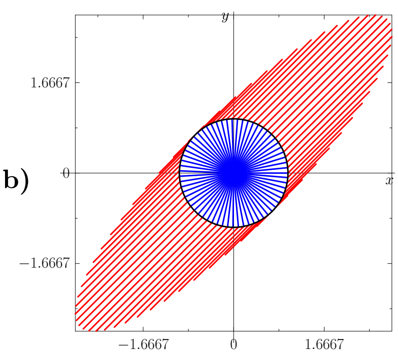
d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = -1$ **e)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$

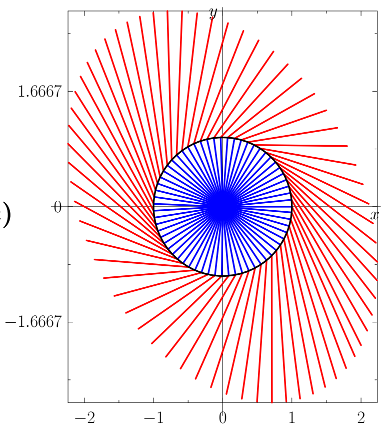
Ejercicio 9.11 En los siguientes casos, encontrar los autovalores y autovectores asociados de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

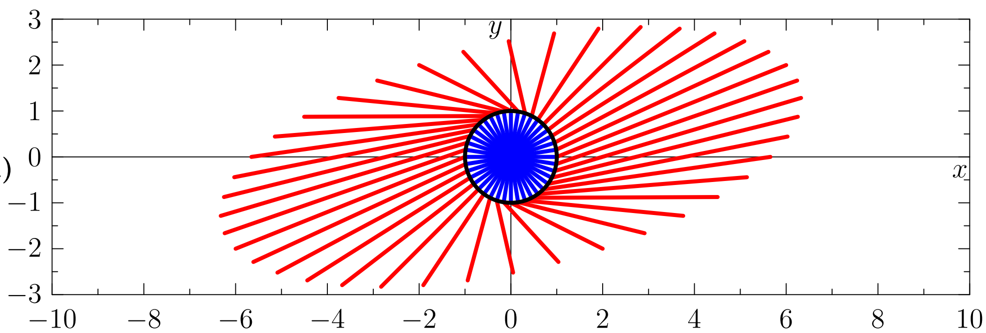
a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9.12 En los siguientes casos, los vectores unitarios $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ y sus imágenes $A\vec{x}$ bajo la acción de una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se dibujan uno a continuación del otro. Estimar, utilizando una regla métrica, los autovectores y autovalores de A a partir de cada una de las *autoimágenes* siguientes y dar un ejemplo numérico de una posible matriz A con este comportamiento.

a)


b)


c)


d)


Ejercicio 9.13 En los siguientes casos, demostrar de alguna forma que A y B no son matrices semejantes.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9.14 En los siguientes casos, encontrar:

1. El polinomio característico de A.
2. Los autovalores de A.
3. Una base de cada uno de los autoespacios de A.
4. La multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica de cada autovalor.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **g)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **i)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **j)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

k) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **l)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9.15 En los siguientes casos se muestra una diagonalización de la matriz A en la forma $P^{-1}AP = D$. Listar los autovalores de A así como las bases de los autoespacios correspondientes.

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.16 En los siguientes casos determinar si A es diagonalizable y, si lo es, encontrar una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9.17 Sea el vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ y la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ y autovalores asociados λ_1, λ_2 y λ_3, dados por:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \lambda_1 = -\frac{1}{3} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad \lambda_3 = 1$$

a) Encontrar $A^{20}\vec{x}$.

b) Encontrar $A^k\vec{x}$ y determinar su valor cuando $k \to \infty$.

Ejercicio 9.18 Sabiendo que: $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$
Calcular la potencia indicada de la siguientes matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2002}$$

Ejercicio 9.19 En los siguientes casos, determinar todos los valores $k \in \mathbb{R}$ para los cuales A es diagonalizable.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$

Ejercicio 9.20 Diagonalizar ortogonalmente las matrices A siguientes y encontrar una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $Q^TAQ = D$.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 9.21 Con los siguientes datos, encontrar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con autovalores λ_1 y λ_2 y autovectores ortogonales asociados $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

$$\lambda_1 = 3 \quad ; \quad \lambda_2 = -3 \quad ; \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

10.1 Ejercicios de Clase

Teoría Básica

Ejercicio 10.1 Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales son EDO o EDP, su orden y grado y si son lineales o no.

a) $6\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^5 - 7v = 15t^2 + 3t + 10$ **b)** $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} - 7y = 0$

c) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$ **d)** $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6yy' = 0$

e) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \operatorname{sen}(xy)$ **f)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

Ejercicio 10.2 Determinar si las siguientes funciones son soluciones de la EDO dada, sabiendo que $c_i \in \mathbb{R}$.

a) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$; $y'' - 5y' + 6y = 0$

b) $3e^{2y} = 2e^{3x} + c_1$; $y' = e^{3x-2y}$

c) $x^2 + 2y + xy^2 = c_1$; $y' = \dfrac{2x + y^2}{2(1+xy)}$

d) $y = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$; $y' = 1 - 2xy$

Ejercicio 10.3 Resolver las siguientes EDO mediante el método de separación de variables:

a) $y' = xy^2$ **b)** $e^{y^2}dx + x^2ydy = 0$

c) $(y+1)dx = 2xydy$ **d)** $x^2yy' = e^y$

Ejercicio 10.4 Resolver los siguientes PVI encontrando la solución general y particular del problema.

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x(0) = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos(y)} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

SEDO y EDO de Orden Superior

Ejercicio 10.5 Determinar si las siguientes funciones son soluciones del SEDO dado, sabiendo que $c_i \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = e^{c_1t} \\ y = c_1e^{c_1t} \\ z = c_1^2e^{c_1t} \end{cases}$; $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = zy \end{cases}$

Ejercicio 10.6 Encontrar un SEDO equivalente a las siguientes EDO de orden n.

a) $y'' + y' - 2y = 0$ **b)** $y''' - y'' + 2y' + 5y = e^x + x - 1$ **c)** $y^{(4)} + y'' - 2y = 0$

Ejercicio 10.7 Clasificar los siguientes SEDO1 como lineales, homogéneos, autónomos y/o con coeficientes constantes.

a) $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2xt + y^2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = (t^2+1)x + y \operatorname{sen} t + t \\ y' = 1 \\ z' = tz \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

Ejercicio 10.8 Encontrar la solución general de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x' = x \\ y' = -2y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -4x + 3y \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$

Ejercicio 10.9 Encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que el sistema $d\vec{x}/dt = A\vec{x}$ tenga como solución:

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} + 3e^{3t} \\ 3e^{2t} + 4e^{3t} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10.10 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y k un escalar. Dados los dos sistemas siguientes:

$$(i) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \qquad\qquad (ii) \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = (A + kI_n)\vec{y}$$

Demostrar que si $\vec{x}(t)$ es una solución del sistema (i), entonces $\vec{y}(t) = e^{kt}x(t)$ es una solución del sistema (ii).

Ejercicio 10.11 Encontrar la solución general y particular de los siguientes sistemas, esbozando las correspondientes curvas integrales.

a) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}\vec{x}$; $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\vec{x}$; $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\vec{x}$; $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\vec{x}$; $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10.12 Resolver los siguientes problemas de valores iniciales y de contorno, esbozando la solución.

a) $\begin{cases} y' + 2y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 10y = 0 \\ y(0) = 1, \ y(1) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0 \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = -3 \end{cases}$

Sistemas Dinámicos y Estabilidad

Ejercicio 10.13 Dados los autovalores y autovectores asociados a los SEDOCB del **Ejercicio 10.11**:

a) $\begin{cases} \lambda_1 = -1 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,2] \\ \lambda_2 = -2 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,3] \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \lambda_1 = 0 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,1] \\ \lambda_2 = 2 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,-1] \end{cases}$

c) $\{ \ \lambda = -2 \text{ (doble)} \quad ; \quad \vec{v} = [1,0]$ **d)** $\{ \ \lambda = -3 \pm i \quad ; \quad \vec{v} = [1, \pm i]$

Se pide:

1. Determinar la estabilidad del sistema, clasificándolo en: asintóticamente estable, uniformemente estable o inestable.
2. Determinar el tipo de puntos críticos.
3. Esbozar el plano de fases del sistema, indicando las separatrices.

Ejercicio 10.14 Resolver el problema de valor inicial:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} p & -q \\ q & p \end{bmatrix} \vec{x} \quad ; \quad \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

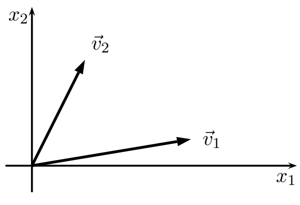
donde $p, q \in \mathbb{R}$ con $q \neq 0$. Clasificar el sistema y determinar el tipo de puntos críticos para los casos p positivo, cero y negativo.

Ejercicio 10.15 Determinar la estabilidad y el tipo de puntos críticos de los siguientes sistemas, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el problema anterior.

a) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$ **b)** $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \vec{x}$

c) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$ **d)** $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x}$

Ejercicio 10.16 Sea una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ no invertible con dos autovalores distintos $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 < 0$. Si los autovectores asociados tienen las direcciones indicadas en el siguiente gráfico, esquematizar el plano de fase correspondiente al sistema dinámico $d\vec{x}/dt = A\vec{x}$, indicando la forma y comportamiento de las trayectorias a tiempos grandes.



Ejercicio 10.17 Demostrar que si un sistema $d\vec{x}/dt = A\vec{x}$ es estable, entonces el sistema $d\vec{x}/dt = A^{-1}\vec{x}$ también es estable.

Ejercicio 10.18 En cada uno de estos casos, encontrar un ejemplo de un SEDOCB con las siguientes características.

a) Sistema asintóticamente estable donde las trayectorias de su plano fásico son rectas.

b) Sistema uniformemente estable donde las trayectorias de su plano fásico son rectas con pendiente 2.

c) Sistema cuya solución es:

$$\begin{cases} x = -c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ y = 2c_1 e^t - 3c_2 e^{-t} \end{cases}$$

10.2 Ejercicios Propuestos

Teoría Básica

Ejercicio 10.19 Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales son EDO o EDP, su orden y grado y si son lineales o no.

a) $6\dfrac{dv}{dt} - 7v = 15t^2 + 3t + 10$

b) $\left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right)^2 - 5xz\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 6y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - 7yz = 0$

c) $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y^2 = e^x$

d) $e^t x'' + x' \log t = \cos t$

e) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \operatorname{sen} x \cos y$

f) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 y\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = ye^z$

Ejercicio 10.20 Determinar si las siguientes funciones son soluciones de la EDO dada, sabiendo que $c_i \in \mathbb{R}$.

a) $P = \dfrac{c_1 e^t}{1 + c_1 e^t}$; $P' = P(1-P)$

b) $-2x^2 y + y^2 = 1$; $2xy\ dx + (x^2 - y)\ dy = 0$

c) $y = e^{-x^2}\left(c_1 + \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)$; $y' + 2xy = 1$

d) $xy = \log y + 3$; $y' = \dfrac{y^2}{1 - xy^2}$

Ejercicio 10.21 Resolver las siguientes EDO mediante el método de separación de variables:

a) $(2+x)y' = y^4$

b) $3ydx = 2xdy$

c) $\cos x \cos y dx + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y dy = 0$

d) $x^2 dx + y(x-1)dy = 0$

Ejercicio 10.22 Resolver los siguientes PVI encontrando la solución general y particular del problema.

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^k \quad (\text{con } k \neq 1) \\ x(0) = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Ejercicio 10.23 Encontrar una ecuación diferencial de la forma $dx/dt = kx$ cuya solución sea $x(t) = 3^t$.

SEDO y EDO de Orden Superior

Ejercicio 10.24 Determinar si las siguientes funciones son soluciones del SEDO dado, sabiendo que $c_i \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} x = 1 + t + t^2 \\ y = 1 + 2t \end{cases}$; $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u = \cos x + \operatorname{sen} x \\ v = \cos x - \operatorname{sen} x \end{cases}$; $\begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}(t+c)^{2/3} \\ y = (t+c)^{1/3} \end{cases}$; $\begin{cases} x' = 1/y \\ y' = 1/(2x) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = (1 - c_1 e^{2t})^{-\frac{1}{2}} \\ y = c_2 e^{-2t} \end{cases}$; $\begin{cases} x' = (c_2/c_1)x^3 y \\ y' = -2y \end{cases}$

e) $\begin{cases} y_1 = c_1 e^{-x} + c_3 e^{2x} \\ y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 e^{2x} \\ y_3 = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \end{cases}$; $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 3y_2 - 3y_3 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 - 3y_3 \\ y_3' = -2y_1 + 2y_2 - y_3 \end{cases}$

Ejercicio 10.25 Encontrar un SEDO equivalente a las siguientes EDO de orden n.

a) $y'' + 4y = 0$ **b)** $y''' - y'' + 2y' - 2y = x$ **c)** $y^{(4)} - 3y'' + 2y = 0$

Ejercicio 10.26 Clasificar los siguientes SEDO1 como lineales, homogéneos, autónomos y/o con coeficientes constantes.

a) $\left\{\begin{array}{l} x' = 1 \\ y' = t \\ z' = z \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x' = x^2 + y - z \\ y' = 2x + 2y \\ z' = x - z \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x' = (t+1)x \\ y' = (t^2 + t + 1)y \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} x' = x^2 + y^2 + t^2 \\ y' = xy \end{array}\right.$ **e)** $\left\{\begin{array}{l} x' = t^2 x + ty \\ y' = y \operatorname{sen} t - t^2 z \\ z' = z\sqrt{t} \end{array}\right.$ **f)** $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y \\ y' = -2x - y \end{array}\right.$

Ejercicio 10.27 Encontrar la solución general de los siguientes sistemas.

a) $\left\{\begin{array}{l} x' = x - 3x \\ y' = -2y \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x' = -6x + 4y \\ y' = -8x + 6y \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x - 3y - 7z \\ y' = 6x - 5y - 8z \\ z' = -z \end{array}\right.$

Ejercicio 10.28 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y k un escalar. Dados los dos sistemas siguientes:

$$(i) \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \qquad\qquad (ii) \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = kA\vec{y}$$

Demostrar que si $\vec{x}(t)$ es una solución del sistema (i), entonces $\vec{y}(t) = x(kt)$ es una solución del sistema (ii).

Ejercicio 10.29 Encontrar la solución general y particular de los siguientes sistemas, esbozando las correspondientes curvas integrales.

a) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} \ ; \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \vec{x} \ ; \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

c) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} \ ; \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ **d)** $\dfrac{d\vec{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}(t) \ ; \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} \ ; \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ **f)** $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} \ ; \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

g) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} \ ; \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **h)** $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} \ ; \ \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10.30 Resolver los siguientes problemas de valores iniciales y de contorno.

a) $\left\{\begin{array}{l} f' - 5f = 0 \\ f(0) = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} f'' + f = 0 \\ f(0) = 1, \ f(\pi/2) = 1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} x'' + 2x' + x = 0 \\ x(0) = 1, \ x'(0) = 0 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} y'' = 0 \\ y(0) = 0, \ y(1) = 1 \end{array}\right.$

Sistemas Dinámicos y Estabilidad

Ejercicio 10.31 Dados los autovalores y autovectores asociados a los SEDOCB del **Ejercicio 10.29**:

a) $\begin{cases} \lambda_1 = 1 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,0] \\ \lambda_2 = 2 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,1] \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \lambda_1 = -1 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,1] \\ \lambda_2 = -6 & ; \quad \vec{v}_1 = [-3,2] \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lambda_1 = 3 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,1] \\ \lambda_2 = -2 & ; \quad \vec{v}_1 = [-2,3] \end{cases}$ **d)** $\{ \lambda = -1 \pm 2i \quad ; \quad \vec{v} = [1, \pm i]$

e) $\begin{cases} \lambda_1 = 0 & ; \quad \vec{v}_1 = [-2,1] \\ \lambda_2 = 5 & ; \quad \vec{v}_1 = [1,2] \end{cases}$ **f)** $\{ \lambda = 1 \text{ (doble)} \quad ; \quad \vec{v}_1 = [1,0],\ \vec{v}_2 = [0,1]$

g) $\{ \lambda = 1 \text{ (doble)} \quad ; \quad \vec{v} = [0,1]$ **h)** $\{ \lambda = \pm 2i \quad ; \quad \vec{v} = [\pm i, 2]$

Se pide:

1. Determinar la estabilidad del sistema, clasificándolo en: asintóticamente estable, uniformemente estable o inestable.
2. Determinar el tipo de puntos críticos.
3. Esbozar el campo de dirección del sistema, calculando las separatrices y dibujando algunas trayectorias.

Ejercicio 10.32 En los siguientes sistemas, determinar los valores $a, b, k \in \mathbb{R}$, según los casos, que hacen del origen un punto crítico estable.

a) $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \vec{x}$ **b)** $\dfrac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & k \\ k & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$

SOLUCIONES

0 Temas de Repaso

Ejercicio 0.1 general: $x + 2y = 5$, paramétrica: $\{x = 5 - 2t, y = t\}$, vectorial: $[x, y] = [5, 0] + t[-2, 1]$, normal: $[1, 2] \cdot ([x, y] - [5, 0]) = 0$. Pendiente$= -1/2$, vector director $= [-2, 1]$ y vector normal $= [1, 2]$.

Ejercicio 0.2 vectorial: $[x, y, z] = [1, 1, 0] + t[3, 1, -1]$, paramétrica: $\{x = 1 + 3t, y = 1 + t, z = -t\}$, general: $\{x + 3z = 1, y + z = 1\}$, normal: $\{[x, y, z] - [1, 0, 0]) = 0, [0, 1, 1] \cdot ([x, y, z] - [0, 1, 0]) = 0\}$. Pendiente$= -1/\sqrt{10}$, vector director $= [3, 1, -1]$ y vectores normales: $\vec{n}_1 = [1, 0, 3]$, $\vec{n}_2 = [0, 1, 1]$.

Ejercicio 0.3 general: $2x - 2y - z = -1$, paramétrica: $\{x = t, y = s, z = 1 + 2t - 2s\}$, vectorial: $[x, y, z] = [0, 0, 1]+t[1, 0, 2]+s[0, 1, -2]$, normal: $[2, -2, -1]\cdot([x, y, z]-[1, 1, 1]) = 0$. Dos vectores contenidos en el plano: $\vec{u} = [1, 0, 2]$ y $\vec{v} = [0, 1, -2]$. Vector normal al plano: $\vec{n} = [2, -2, -1]$.

Ejercicio 0.4 **a)** vectorial: $[x, y] = [-4, 4] + t[1, 1]$, paramétrica: $\{x = -4 + t, y = 4 + t\}$. **b)** vectorial: $[x, y, z] = t[1, -1, 4]$, paramétrica: $\{x = t, y = -t, z = 4t\}$.

Ejercicio 0.5 **a)** normal: $[3, 2]\cdot([x, y]-[0, 0]) = 0$, general: $3x+2y = 0$. **b)** normal: $\{[1, -1, 5]\cdot([x, y, z]-[-3, 5, 1]) = 0, [1, 2, 3] \cdot ([x, y, z] - [-3, 5, 1]) = 0\}$, general: $\{x - y + 5z = -3, x + 2y + 3z = 10\}$.

Ejercicio 0.6 **a)** Perpendiculares. **b)** paralelos con ℓ contenida en $\mathcal{P}$. **c)** Secantes en un punto, no perpendiculares.

Ejercicio 0.7 $\{x = 1, y = -1, z = 2\}$.

Ejercicio 0.8 Si $m \neq 2$ el sist. es compatible y determinado, con sol. $\{x = 0, y = 1\}$ y si $m = 2$ el sist. es compatible e indeterminado, con infinitas soluciones $\{x = t, y = 1 - 2t\}$.

Ejercicio 0.9 **a)** $[3, 2, 1] \cdot ([x, y, z] - [0, 1, 0]) = 0$, $3x + 2y + z = 2$. **b)** $[x, y, z] = [6, -4, -3] + t[0, 1, 1] + s[-1, 1, 1]$, $\{x = 6 - s, y = -4 + t + s, z = -3 + t + s\}$. **c)** $4x - 5y - 7z = 2$. **d)** $\{x = t, y = -1 + 3t\}$, $[x, y] = [0, -1] + t[1, 3]$.

Ejercicio 0.10 **a)** Perpendiculares. **b)** Perpendiculares. **c)** Ninguna.

Ejercicio 0.11 $\{x = t, y = -1 - t, z = 1 - t\}$.

Ejercicio 0.12 **a)** Rectas secantes en el punto $[0, 4, 0]$. **b)** Rectas no secantes.

Ejercicio 0.13 **a)** $[3/2, 1/2, -1]$. **b)** $[1, 0, 0]$. **c)** $[-1/2, -3/2, 3]$.

Ejercicio 0.14 Si $m = 1$ sistema incompatible. Si $m \neq 1$ sistema compatible y determinado con solución: $\{x = 1/(m - 1), y = (m - 2)/[3(m - 1)], z = (2m - 4)/[3(m - 1)\}$.

---

1 Números Complejos

Ejercicio 1.1 **a)** $7 - 4i$. **b)** $2 + i$. **c)** $-1/2 + i$.

Ejercicio 1.2 $x = \pm 2$.

Ejercicio 1.3

Ejercicio 1.4 **a)** $-2^{10} = 2^{10}_{\pi} = 2^{10}[\cos(\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi)] = 2^{10}e^{i\pi}$. **b)** $1 + i\sqrt{3} = 2_{\pi/3} = 2[\cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(\pi/3)] = 2e^{i\pi/3}$. **c)** $-(2+\sqrt{2})/2 + i(2+\sqrt{2})/2 = (1+\sqrt{2})_{3\pi/4} = (1+\sqrt{2})[\cos(3\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(3\pi/4)] = (1+\sqrt{2})e^{3\pi i/4}$.

Ejercicio 1.5 **a)** $|z| = 2,\ \arg(z) = 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = 0,\ \bar{z} = 2$. **b)** $|z| = \sqrt{10},\ \arg(z) = -5\pi/6 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = -5\pi/6,\ \bar{z} = -3 + i\sqrt{3}$. **c)** $|z| = 2,\ \arg(z) = \pi/3 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = \pi/3,\ \bar{z} = 2_{-\pi/3}$. **d)** $|z| = 3,\ \arg(z) = \pi - 5 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = \pi - 5,\ \bar{z} = 3_{5-\pi}$.

Ejercicio 1.6 **a)** $\forall x \in \mathbb{R},\ y = 0$. **b)** $x \geq 0,\ y = 0$. **c)** $x = 1,\ y = \pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 1.7

Ejercicio 1.8 **a)** No es posible. **b)** Interior de la circunferencia con centro en el origen y radio 1. **c)** Recta vertical $z = \frac{1}{2} + iy,\ \forall y \in \mathbb{R}$. **d)** Afijo $(\log 2/2, 3\pi/4)$.

Ejercicio 1.9 **a)** $\{z_1 = -1,\ z_2 = 1,\ z_3 = i,\ z_4 = -i\}$. **b)** $\{z_1 = (-1+i)/2,\ z_2 = (-3-i)/2\}$. **c)** $z = e^{e}_{\pi}$.

Ejercicio 1.10 **a)** $17 - i$. **b)** $(-9/4)(3+i)$. **c)** $1 - i$.

Ejercicio 1.11 $z_1 = -1 + (2 \mp \sqrt{2})i,\ z_2 = 2 + (2 \pm \sqrt{2})i$.

Ejercicio 1.12 $P(x) = x^2 - 10x + 29$.

Ejercicio 1.13

Ejercicio 1.14 **a)** 0. **b)** $1 - i\sqrt{3} = 2_{2\pi/3} = 2[\cos(2\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/3)] = 2e^{2\pi i/3}$. **c)** $-i = 1_{-\pi/2} = [\cos(-\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(-\pi/2)] = e^{-\pi i/2}$. **d)** $i = 1_{\pi/2} = [\cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2)] = e^{\pi i/2}$. **e)** $1 - i = \sqrt{2}_{-\pi/4} = \sqrt{2}[\cos(-\pi/4) + i\,\mathrm{sen}(-\pi/4)] = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}$. **f)** $1 = 1_0 = [\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0)] = e^{0i}$. **g)** $2 = 2_0 = 2[\cos(0) + i\,\mathrm{sen}(0)] = 2e^{0i}$. **h)** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 1_{\pi/6} = [\cos(\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(\pi/6)] = e^{\pi i/6}$.

Ejercicio 1.15 **a)** $|z| = 1,\ \arg(z) = 2k\pi,\ \arg(z) = 0,\ \bar{z} = 1$. **b)** $|z| = 2,\ \arg(z) = \pi/2 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = \pi/2,\ \bar{z} = -2i$. **c)** $|z| = 3,\ \arg(z) = 11\pi/6 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = -\pi/6,\ \bar{z} = 3_{\pi/6}$. **d)** $|z| = 4,\ \arg(z) = \pi/4 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = \pi/4,\ \bar{z} = 4e^{-\pi/4}$. **e)** $|z| = 2\sqrt{3},\ \arg(z) = 5\pi/6 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = 5\pi/6,\ \bar{z} = -3 - i\sqrt{3}$. **f)** $|z| = 1,\ \arg(z) = \pi/4 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = \pi/4,\ \bar{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. **g)** $|z| = 4,\ \arg(z) = \pi + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = \pi,\ \bar{z} = -4$. **h)** $|z| = 2,\ \arg(z) = -5 + 2k\pi,\ \mathrm{Arg}(z) = 2\pi - 5,\ \bar{z} = 2e^{5i}$.

Ejercicio 1.16 **a)** $\{x = 0,\ \forall y \in \mathbb{R}\}$ ó $\{y = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$. **b)** $\{\forall x, y \in \mathbb{R}\}$. **c)** $\{y = 0,\ x = 1\}$ ó $\{x = -1/2,\ y = \pm\sqrt{3}/2\}$. **d)** $\{x = 0,\ y = (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicio 1.17

Ejercicio 1.18 **a)** No es posible. **b)** Exterior de la circunferencia con centro $(0, -i)$ y radio 3. **c)** Recta $z = x - ix,\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejercicio 1.19 Es una espiral.

Ejercicio 1.20 **a)** $\{z_1 = \sqrt[10]{2}_{\pi/20},\ z_2 = \sqrt[10]{2}_{9\pi/20},\ z_3 = \sqrt[10]{2}_{17\pi/20},\ z_4 = \sqrt[10]{2}_{25\pi/20},\ z_5 = \sqrt[10]{2}_{33\pi/20}\}$. **b)** $\{z_1 = (1+i)/2,\ z_2 = -1 - i\}$. **c)** $\{z = -i/3\}$. **d)** $\{z_1 = (\pi/2 + 2k\pi) + i\log(-1+\sqrt{2}),\ z_2 = (-\pi/2 + 2k\pi) + i\log(1+\sqrt{2})\}$.

---

2 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejercicio 2.1 **a)** $\{x + y + z = 1, x - y + z = 0, x = 0\}$. **b)** $\{x + y + z = 1, x - y + z = 0, 2x + 2y = 1\}$. **c)** $\{x + y + z = 1, x - y + z = 0, 2x + 2z = 3\}$. **d)** $\{x + y + z = 1, x - y + z = 2, x - y + z = 0\}$.

Ejercicio 2.2 **a)** $\{x = 3/2, y = 1/2\}$, punto (dim=0) en espacio de dim=2. **b)** $\{x = -1, y = -3, z = t\}$, recta (dim=1) en espacio de dim=3. **c)** $\{x = 2, y = t, z = s, w = r\}$, hiperplano de dim=3 en espacio de dim=4. **d)** $\{x = 0, y = 1 + t, z = t, w = -2\}$, recta (dim=1) en espacio de dim=4.

Ejercicio 2.3 **a)** $\{x = -1,\ y = -1,\ z = 1\}$. **b)** $\{x = -2t,\ y = t,\ z = t\}$. **c)** $\{x = t,\ y = s,\ z = -1 + t + s\}$.

Ejercicio 2.4 **a)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 2.5 **a)** $F_i \leftrightarrow F_j$. **b)** $\frac{1}{k}F_i$. **c)** $F_i - kF_j$.

Ejercicio 2.6 Por ejemplo la secuencia: $F_2 - 3F_1$, $\frac{-1}{2}F_2$, $F_1 - 2F_2$, $-F_2$, $F_2 + 3F_1$, $F_1 \leftrightarrow F_2$.

Ejercicio 2.7 **a)** Sol. única. (S.C.D.) **b)** No tiene solución. (S.I.) **c)** Infinitas soluciones (S.C.I.).

Ejercicio 2.8 **a)** $\{x = 1, y = -2\}$. **b)** $\{x_1 = -t, x_2 = -t, x_3 = t\}$. **c)** $\{x = -5\alpha+\beta,\ y = 1+4\alpha-3\beta,\ z = \alpha, w = \beta\}$. **d)** $\{r = 2, s = -1\}$.

Ejercicio 2.9 Para $k = 1$ sistema incompatible. Para $k = -2$ sistema compatible indeterminado, $\{x = 1 + t, y = t, z = t\}$. Para $k \neq \{1, -2\}$ sistema compatible determinado, $\{x = -2k/(1 - k), y = 1/(1 - k), z = 1/(1 - k)\}$.

Ejercicio 2.10 **a)** Por ejemplo, los planos paralelos $\{x + y + z = 0,\ x + y + z = 1\}$ y la recta secante a ambos $\{x - y = 0,\ z = 0\}$. El sistema estaría formado por las cuatro ecuaciones anteriores. **b)** Por ejemplo, los dos rectas paralelas $\{x - y = 0,\ x - z = 0\}$ y $\{x - y = 1,\ x - z = 0\}$, la recta secante a ambas $\{y = 0,\ z = 0\}$. El sistema estaría formado por las seis ecuaciones anteriores. **c)** Por ejemplo, los planos secantes $\{x + y + z = 0,\ x + y - z = 0\}$ y la recta secante en el punto común $\{y = 0,\ z = 0\}$. El sistema estaría formado por las cuatro ecuaciones anteriores. **d)** Por ejemplo, los planos secantes $\{x+y+z = 0,\ x+y-z = 0\}$ y la recta secante en la recta común $\{x+y = 0,\ z = 0\}$. El sistema estaría formado por las cuatro ecuaciones anteriores.

Ejercicio 2.11 Los sistemas sobredeterminados sí pueden ser compatibles determinados, pero los infradeterminados no.

Ejercicio 2.12 **a)** Plano (dim=2) o recta (dim=1). **b)** hiperplano (dim=3) o plano (dim=2). **c)** No tiene solución. **d)** Plano (dim=2) o recta (dim=1).

Ejercicio 2.13 **a)** $\{x_1 = \alpha,\ x_2 = 3\alpha - 4,\ x_3 = 3 - 2\alpha,\ x_4 = \beta,\ x_5 = \gamma\}$, hiperplano de dim=3 en espacio de dim=5. **b)** $\{x = 0,\ y = -1,\ z = 1\}$, punto (dim=0) en espacio de dim=3. **c)** $\{x = t,\ y = s,\ z = r,\ w = 2 - t - s - r\}$, hiperplano de dim=3 en espacio de dim=4. **d)** El sistema no tiene solución.

Ejercicio 2.14 **a)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 & -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/7 & 15/7 \\ 0 & 1 & 9/7 & -3/7 \end{bmatrix}$. **b)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 2.15 La primera operación $F_1' = F_1+F_2$ da un resultado distinto que la segunda $F_2' = F_1'+F_2$.

Ejercicio 2.16 Representando por x cualquier número y por y cualquier número distinto de cero. Formas escalonadas equivalentes: $\begin{bmatrix} y & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & y & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y & x & x \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y & x & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & y & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} y & x & x \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$. Formas escalonadas reducidas equivalentes: $\begin{bmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 2.17 Sí, compatible indeterminado (dos parámetros libres).

Ejercicio 2.18 **a)** Incompatible. **b)** Incompatible. **c)** Compatible determinado. **d)** Compatible determinado. **e)** Incompatible. **f)** Compatible indeterminado.

Ejercicio 2.19 **a)** Incompatible. **b)** $\{x_1 = -2 + 3s,\ x_2 = s,\ x_3 = 1 + 2t,\ x_4 = t\}$. **c)** $\{x = 1,\ y = 2,\ z = 3\}$. **d)** $\{a = -3,\ b = 2,\ c = 1\}$. **e)** Incompatible. **f)** $\{x = \sqrt{2},\ y = -1,\ z = 0\}$.

Ejercicio 2.20 **a)** Si $k = -1$ sist. incompatible. Si $k = 1$ compatible indeterminado, $\{x = 1-t,\ y = t)\}$. Si $k \neq \pm 1$ compatible determinado, $\{x = 1/(1 + k),\ y = 1/(1 + k)\}$. **b)** Para $k = \{2, -1\}$ el sistema es compatible indeterminado, con soluciones: $\{x = (2+2k-5t)/3,\ y = (k-2+2t)/3,\ z = t\}$. Si $k \neq \{2, -1\}$ el sistema es incompatible.

Ejercicio 2.21 **1.** Verdadero. **2.** Verdadero. **3.** Falso. **4.** Verdadero. **5.** Verdadero. **6.** Verdadero. **7.** Falso. **8.** Verdadero. **9.** Falso. **10.** Falso. **11.** Verdadero.

---

3 Espacios Vectoriales

Ejercicio 3.1 **a)** Por ejemplo, linealmente dependientes $[6, 0]$ y $[-4, 0]$, y linelmente independientes $[0, 1]$ y $[2, 3]$. **a)** Por ejemplo, linealmente dependientes $[1, 2, 0]$ y $[-2, 3, 0]$, y linelmente independientes $[1, 1, 1]$ y $[-1, 1, -2]$.

Ejercicio 3.2 **a)** No es un conjunto generador ni base de $\mathbb{R}^2$, rang=1. **b)** Sí es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$ pero no una base del mismo, rang=2. **c)** Sí es un conjunto generador y una base de $\mathbb{R}^3$, rang=3.

Ejercicio 3.3 $\mathbb{R}^3 \not\subseteq \mathbb{R}^4$. $\mathbf{dim\ 0} = \{[0, 0, 0, 0]\}$. $\mathbf{dim\ 1} = \{x_1 = t,\ x_2 = t, x_3 = -t, x_4 = 0\}$. $\mathbf{dim\ 2} = \{x_1 = t+s,\ x_2 = 2t, x_3 = -t+2s, x_4 = 0\}$. $\mathbf{dim\ 3} = \{x_1 = t+s+r,\ x_2 = 2t-s, x_3 = -t+2s, x_4 = r\}$. $\mathbf{dim\ 4} = \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3.4 **a)** No. **b)** No. **c)** Sí. **d)** No. **e)** Sí.

Ejercicio 3.5 **a)** V. Lin. Dep= $[0, 0, 1, 1]$, V. Lin. Indep= $[1, 1, 0, 0]$, Conj. Gen= $\{[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 1]\}$, Base=$\{[0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1]\}$, Rango=2. **b)** V. Lin. Dep= $[1, 1, 0]$, V. Lin. Indep= $[1, 1, 1]$, Conj. Gen= $\{[1, 1, 0], [1, -1, 0]\}$, Base=$\{[1, 1, 0], [1, -1, 0]\}$, Rango=2.

Ejercicio 3.6 $[-1/3,\ 1/3,\ 1/3]$.

Ejercicio 3.7 **a)** $d = 1$. **b)** $d = 1/3$.

Ejercicio 3.8 **a)** V. Lin. Dep: $[1, 0, 1]$, V. Lin. Indep: $[1, 0, 2]$, Conj. Gen: $\{[1, 0, 1], [1, 1, 1], [0, 1, 0]\}$, Base: $\{[1, 0, 1], [1, 1, 1]\}$. **b)** V. Lin. Dep: $[1, 1, 1, 1]$, V. Lin. Indep: $[1, 0, 2, 0]$, Conj. Gen: $\{[1, 0, 1, -1], [1, 1, 1, 1], [1, 3, 1, 5]\}$, Base: $\{[1, 0, 1, -1], [1, 1, 1, 1]\}$. **c)** No se puede calcular por no ser S_3 un subespacio vectorial. **d)** V. Lin. Dep: $[1, 1, -2, 1]$, V. Lin. Indep: $[1, 0, 0, 0]$, Conj. Gen: $\{[1, 0, -1, 1], [0, 1, -1, 0], [1, 1, -2, 1]\}$, Base:$\{[1, 0, -1, 1], [0, 1, -1, 0]\}$.

Ejercicio 3.9 **a)** Linealmente independiente, rang=2. **b)** Linealmente independiente, rang=3. **c)** Linealmente independiente, rang=2.

Ejercicio 3.10 **a)** $\mathbb{R}^2$. **b)** $\mathbb{R}^3$. **c)** $\{x_1 = t, x_2 = -s, x_3 = t + s, x_4 = t - s, x_5 = t + s\}$.

Ejercicio 3.11
a) No es posible al no ser un subespacio vectorial. **b)** Conj. Gen: $\{[1, 0, 1], [0, 1, 1], [1, -1, 0]\}$, Base: $\{[1, 0, 1], [0, 1, 1]\}$. **c)** Conj. Gen: $\{[1, 0, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 1, 1], [1, 0, 1, 1, 0], [1, 0, 1, 0, 1], [1, 0, 1, -1, -1]\}$, Base: $\{[1, 0, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 1, 1], [1, 0, 1, 1, 0], [1, 0, 1, 0, 1]\}$.

Ejercicio 3.12 **a)** $\sqrt{5}$, $\left[\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$, -1, $\sqrt{17}$. **b)** $\sqrt{6}$, $\left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}, 0\right]$, 2, $\sqrt{45}$.

Ejercicio 3.13 **a)** $3\pi/4$. **b)** $\arccos(5/6) \approx 0.59$.

Ejercicio 3.14 Ninguno.

Ejercicio 3.15 **a)** $[2, -2]$. **b)** $\frac{3}{2}[1, -1, 1, -1]$

Ejercicio 3.16 **a)** Vectores con la misma dirección y sentido. **b)** Vectores con la misma dirección y sentido contrario.

Ejercicio 3.17 No. Un contraejemplo: $\vec{u} = [1, 2]$, $\vec{v} = [1, -1]$ y $\vec{w} = [-1, 0]$.

Ejercicio 3.18 **a)** $d = \sqrt{2}$. **b)** $d = \sqrt{2}/2$. **c)** $d = 2\sqrt{3}/3$. **d)** $d = 1/3$.

Ejercicio 3.19 **a)** Usar $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$ y simplificar. **b)** Usar $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ y comprobar que para ser iguales necesitan ser ortogonales. **c)** Calcular $\vec{u} \cdot [\vec{v} - \text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})]$ usando $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$. **c)** Usar $\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$.

---

4 Matrices

Ejercicio 4.1 **a)** $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **b)** No se puede calcular. **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4.2 **a)** Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4.3 **a)** $u^T v = v^T u = a + 2b + 3c$, $uv^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{bmatrix}$, $vu^T = \begin{bmatrix} a & 2a & 3a \\ b & 2b & 3b \\ c & 2c & 3c \end{bmatrix}$. **b)** En ambos casos uno es el transpuesto del otro, pero en el primero al ser escalares los resultados, coinciden.

Ejercicio 4.4 **a)** Cierta. **b)** Falsa.

Ejercicio 4.5 Una matriz es invertible si tiene inversa por la izquierda y por la derecha: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. La matriz del problema no lo cumple, por tanto no es invertible.

Ejercicio 4.6 **a)** 0. **b)** -24. **c)** -15. **d)** 0. **e)** 0. **f)** -1. **g)** -24. **h)** 0.

Ejercicio 4.7 **a)** -6. **b)** -3/2. **c)** $3 * 2^n$. **d)** $-2 * 3^n$.

Ejercicio 4.8 $|A| = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4.9 $\mathcal{B}_{\text{fil}} = \{[1, 1, -3], [0, 1, 4], [0, 0, 1]\}$, $\mathcal{B}_{\text{col}} = \{[1, 0, 1, 1], [1, 2, 2, -1], [-3, 1, 1-4]\}$, Base del núcleo no existe.

Ejercicio 4.10 $\vec{b} \in \text{col}(A)$, $\vec{w} \notin \text{fil}(A)$.

Ejercicio 4.11 $\mathcal{B} = \{[1, -1, 0], [0, -1, 1]\}$.

Ejercicio 4.12 **a)** $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \\ -6 & -2 & -4 \end{bmatrix}$. **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$. **c)** 10. **d)** h. **e)** $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -4 & -8 & -12 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4.13 $B = \begin{bmatrix} 3t & 3s \\ t & s \end{bmatrix}$; $t, s \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.14 **a)** Columna j-ésima de A. **b)** Fila j-ésima de A. **c)** Elemento a_{ij} de A.

Ejercicio 4.15 **a)** Cierto. **b)** Falso. **c)** Falso. **d)** Cierto. **e)** Cierto. **f)** Falso. **g)** Cierto. **h)** Cierto.

Ejercicio 4.16 **a)** 2*4. **b)** -6*4. **c)** -4. **d)** 4. **e)** -2*4. **f)** 2*4.

Ejercicio 4.17 **a)** $|A| = -1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **b)** $|A| = 0$, A^{-1} no existe. **c)** $|A| = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. **d)** $|A| = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4.18 $X = A^{-1}B$

Ejercicio 4.19 **a)** A^{-3}. **b)** $A^{-1}(BA)^2B^{-1}$. **c)** AB^{-2}. **d)** $(AB)^{-1}BA + A$.

Ejercicio 4.20 **a)** $\mathcal{B}_{\text{fil}(A)} = \{[1,0,-1],\ [0,1,2]\}$, $\mathcal{B}_{\text{col}(A)} = \{[1,1],\ [0,1]\}$, $\mathcal{B}_{\ker(A)} = \{[1,-2,1]\}$. **b)** $\mathcal{B}_{\text{fil}(A)} = \{[1,1,-3],\ [0,0,1], [0,1,4]\}$, $\mathcal{B}_{\text{col}(A)} = \{[1,0,1,1],\ [1,2,2,-1], [-3,1,1,-4]\}$, $\nexists \mathcal{B}_{\ker(A)}$.

Ejercicio 4.21 **a)** Sí. **b)** No.

Ejercicio 4.22 **a)** Sí. **b)** No. **c)** Sí. **d)** No.

Ejercicio 4.23 Por ejemplo, $\mathcal{B} = \{[1,-1,1], [1,2,0], [0,1,1]\}$.

Ejercicio 4.24 **a)** $\text{rang}(A) = 3$, $|A| = 0$. **b)** $\mathcal{B}_{\text{fil}(A)} = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\}$, $\mathcal{B}_{\text{col}(A)} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\}$. **c)** $\text{fil}(A) : \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{col}(A) : x_2 - x_3 = 0$. **d)** $\mathcal{B}_{\ker(A)} = \{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\}$. **e)** $\ker(A) :\ \{x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = t, x_4 = 0\}$, $\text{nul}(A) = 1$.

Ejercicio 4.25 **a)** Sí. **b)** $\mathcal{B}_{\text{col}(A)} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_4\}$.

---

5 Transformaciones Lineales

Ejercicio 5.1 Una TL es una función vectorial de varias variables, lineal en todas sus variables, de la forma: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $\vec{y} = T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Ejercicio 5.2 **a)** No. **b)** Sí. **c)** No.

Ejercicio 5.3 **a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. **b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. **c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. **d)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 5.4 **a)** $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -13 \\ 11 & 9 & 17 \end{bmatrix}$. **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. **c)** $C = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n \end{bmatrix}$.

Ejercicio 5.5 $\{x_1 = -y_1 + 2y_2\ ;\ x_2 = y_1 - y_2\}$

Ejercicio 5.6 $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 5.7 Esp. Dom= $\mathbb{R}^2$, Esp. Im=$\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Im}(T) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} : \forall t, s \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$, $\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathrm{nul}(T) = 0$, $\mathrm{rang}(T) = 2$.

Ejercicio 5.8 **a)** Inyectiva, sobreyectiva e isomorfismo. **b)** Inyectiva, no sobreyectiva. No es isomorfismo.

Ejercicio 5.9 Elipse con semieje mayor $5\vec{e}_1$ y semieje menor $2\vec{e}_2$.

Ejercicio 5.10 **a)** $A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$. **b)** $A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. **c)** $A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 5.11 **a)** $A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. **b)** $A = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 5.12 **a)** Función escalar real de variable real. **b)** Función escalar real de varias variables reales. **c)** Función vectorial real de varias variables reales. **d)** Función escalar real de varias variables reales. **e)** Función vectorial real de varias variables reales.

Ejercicio 5.13 En todos estos casos se puede demostrar por ejemplo, comprobando que ninguna cumple la propiedad de multiplicación por un escalar: $T(k\vec{x}) = kT(\vec{x})$.

Ejercicio 5.14 **a)** No invertible. **b)** $\{x_1 = 9y_1 - 2y_2,\ x_2 = -4y_1 + y_2\}$.

Ejercicio 5.15 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 5.16 **a)** $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. **b)** $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 5.17 **a)** $\ker(T) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : \forall t \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathrm{Im}(T) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} : \forall t, s \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathrm{nul}(T) = 1$, $\mathrm{rang}(T) = 2$. No inyectiva, sí sobreyectiva, no biyectiva. **b)** $\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathrm{Im}(T) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} : \forall t, s \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathrm{nul}(T) = 0$, $\mathrm{rang}(T) = 2$. Sí inyectiva, no sobreyectiva, no biyectiva. **c)** $\ker(T) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \forall t \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathrm{Im}(T) = \left\{ r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} : \forall r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathrm{nul}(T) = 1$, $\mathrm{rang}(T) = 3$. No inyectiva, sí sobreyectiva, no biyectiva.

Ejercicio 5.18 **a)** Si $(S \circ T) : X \to Y$ es sobreyectiva, debe abarcar todo Y y esto obliga a que S sea también sobreyectiva. **b)** Inyectiva significa que elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas, pero si la dimensión del dominio es mayor que la dimensión de la imagen, por ejemplo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, no se puede cumplir, ya que hay más elementos en el dominio que en la imagen (al contrario si podría ser). **c)** Sobreyectiva significa que todo elemento de la imagen es imagen de algún elemento del domino. Si la dimensión de la imagen es mayor que la dimensión del dominio, elementos distintos de la imagen tendrían que tener elementos iguales del dominio, pero por definición, eso NO es una función (transformación lineal). Por tanto es imposible.

Ejercicio 5.19 Teniendo en cuenta que $R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, realizar la composición de TL, $R_\alpha \circ R_\beta$, y simplificar las expresiones trigonométricas resultantes.

Ejercicio 5.20 **a)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **c)** $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. **d)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. **e)** $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 5.21

Ejercicio 5.22 **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

---

6 Bases

Ejercicio 6.1 **a)** $\mathcal{B} = \{[1,-1]\}$. **b)** $\mathcal{B} = \{[1,1,0],\ [-1,0,1]\}$. **c)** $\mathcal{B} = \{[0,-1,1]\}$. **d)** $\mathcal{B} = \{[1,1,0,1],\ [0,1,1,2],\ [0,0,1,2]\}$.

Ejercicio 6.2 Por ejemplo, $\mathcal{B} = \{[1,0,0,0],\ [1,1,-1,0],\ [0,0,1,0],\ [0,0,0,1]\}$.

Ejercicio 6.3 $\mathcal{B} = \{[1,2,1],\ [1,0,-1],\ [1,-2,1]\}$

Ejercicio 6.4 **a)** $[\vec{x}]_\mathcal{B} = [2,1]$, $[\vec{x}]_\mathcal{C} = [5/2,-1/2]$. **b)** $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$. **d)** $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.5 **b)** No es una base de $\mathbb{R}^4$. **c)** No es posible. **d)** $[\vec{s}]_{\mathcal{B}'} = [1/2,1,-1/2,0]$.

Ejercicio 6.6 **a)** $\mathcal{B} = \{[2,1,0]\}$. **b)** $\mathcal{B} = \{[-1,1,0],\ [1,0,1]\}$. **c)** $\mathcal{B} = \{[1,0,0,1,0,0],\ [-1,1,0,0,1,0],\ [0,0,0,0,0,1]\}$. **d)** $\mathcal{B} = \{[1,0,0,1],\ [0,1,1,1],\ [0,-1,0,0]\}$.

Ejercicio 6.7 **a)** Comprobar que son linealmente independientes. **b)** Comprobar que la dimensión de W es 3 y verificar que los vectores pertenecen al subespacio. **c)** Comprobar que la dimensión de W es 2, pero que no todos los vectores pertenecen al subespacio.

Ejercicio 6.8 Añadir por ejemplo el vector $[1,0,0,0]$.

Ejercicio 6.9 Por ejemplo, $\mathcal{B} = \{[1,1,0,0],\ [1,0,0,0],\ [0,0,1,0],\ [0,0,0,1]\}$.

Ejercicio 6.10 $[\vec{v}]_\mathcal{B} = [3/2,-1,-1/2,1]$.

Ejercicio 6.11 **a)** $[\vec{w}]_\mathcal{B} = [4,-1,1]$. **b)** $[\vec{w}]_\mathcal{C} = [0,3,1]$.

Ejercicio 6.12 **(1)** $[\vec{x}]_\mathcal{B} = [1,0,-2]$, $[\vec{x}]_\mathcal{C} = [1,-1,-1]$. **(2)** $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **(4)** $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6.13 $[\vec{x}]_\mathcal{B} = t[1,2] + s[1,1]$.

---

7 Ortogonalidad

Ejercicio 7.1 **a)** No. **b)** Sí.

Ejercicio 7.2 $\mathcal{B} = \{[1,0,-2,1],\ [0,1,0,1]\}$, $\mathcal{B}_o = \{[0,1,0,1],\ [2,-1,-4,1]\}$, $\mathcal{B}_{on} = \{[0,1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}],\ [2/\sqrt{22},-1/\sqrt{22},-4/\sqrt{22},1/\sqrt{22}]\}$.

Ejercicio 7.3 **a)** No. $\vec{x} = -\vec{v}_2$, $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [0,-1]$. **b)** Sí. $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3 - \frac{1}{2}\vec{v}_4$, $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}[1,1,1,-1]$.

Ejercicio 7.4 **a)** $\mathcal{B} = \{[-2,1]\}$. **b)** $\mathcal{B} = \{[1,0,0],[0,1,1]\}$.

Ejercicio 7.5 **a)** $\mathcal{B}_{\ker(A^T)} = \{[-3,2]\}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{im}(A)} = \{[2,3]\}$. **b)** $\mathcal{B}_{\ker(A^T)} = \{[1,-2,1]\}$. $\mathcal{B}_{\mathrm{im}(A)} = \{[2,1,0],\ [-1,0,1]\}$.

Ejercicio 7.6 **a)** $\{[2,1,-2]\}$. **b)** $\{[1,2],\ [2,-1]\}$. **c)** $\{[1,0,0,0],\ [0,1,0,0],\ [0,0,1,0]\}$.

Ejercicio 7.7 $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}^{\perp} = [7/2,-2,7/2] + [1/2,0,-1/2]$.

Ejercicio 7.8 **a)** $Q = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$, $R = 3$. **b)** $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 5/\sqrt{5} & 3/\sqrt{5} \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

Ejercicio 7.9 **a)** Ortogonal. **b)** No Ortogonal. **c)** No Ortogonal.

Ejercicio 7.10 **a)** Si. $\vec{x} = (2/3)\vec{v}_2 + (1/3)\vec{v}_3$, $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [0,2/3,1/3]$. **b)** No. $\vec{x} = (1/2)\vec{v}_1 + (5/2)\vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$, $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [1/2,5/2,3]$.

Ejercicio 7.11

Ejercicio 7.12 **a)** Sí. **b)** No. **c)** No. **d)** Sí. **e)** Sí.

Ejercicio 7.13 No, ya que las transformaciones lineales ortogonales conservan la ortogonalidad de los vectores de entrada.

Ejercicio 7.14 Por ejemplo:
$\mathcal{B} = \{[1,0,0,-1],[0,1,0,-1],[0,0,1,-1]\}$, $\mathcal{B}_o = \{[1,0,0,-1],[-1,2,-1,-1],[-1,0,2,-1]\}$, $\mathcal{B}_{on} = \{[1/\sqrt{2},0,0,1/\sqrt{2}],[-1/\sqrt{7},2/\sqrt{7},-1/\sqrt{7},-1/\sqrt{7}],[-1/\sqrt{6},0,2/\sqrt{6},-1/\sqrt{6}]\}$.

Ejercicio 7.15 **a)** $\mathcal{B} = \{[1,-1,-1]\}$. **b)** $\mathcal{B} = \{[2,-4,2,0],[2,-1,-4,3]\}$. **c)** $\mathcal{B} = \{[1,1,0],[0,3,1]\}$. **d)** $\mathcal{B} = \{[1,1,0]\}$.

Ejercicio 7.16 **a)** $\mathrm{fil}(A) = \{[1,0,1],[0,1,-2]\}$, $\mathrm{col}(A) = \{[1,5,0,-1],[-1,2,1,-1]\}$, $\ker(A) = \{[-1,2,1]\}$, $\ker(A^T) = \{[5,-1,7,0],[-3,2,0,7]\}$. **b)** $\mathrm{fil}(A) = \{[1,0,-1,-2,0],[0,1,0,2,0],[0,0,0,0,1]\}$, $\mathrm{col}(A) = \{[1,-2,2,-3],[1,0,2,-1],[2,4,1,5]\}$, $\ker(A) = \{[2,-2,0,1,0],[1,0,1,0,0]\}$, $\ker(A^T) = \{[-5,-3,4,3]\}$.

Ejercicio 7.17 **a)** $\mathrm{proy}_W(\vec{v}) = [19,39,64]$. **b)** $\mathrm{proy}_W(\vec{v}) = [8,12,5,1]$.

Ejercicio 7.18 **a)** $\vec{v} = [-2/5,-6/5] + [12/5,-4/5]$. **b)** $\vec{v} = [1/2,1,1/2] + [7/2,-3,5/2]$. **c)** $\vec{v} = [2,1,5,3] + [0,0,0,0]$.

Ejercicio 7.19 **a)** $\{[4,0,3],[3,0,-4],[0,-2,0]\}$. **b)** $\{[1,-1,1],[0,1,1],\ [2,1,-1]\}$. **c)** $\{[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]\}$. **d)** $\{[5,4,2,2],[-2,2,5,-4]\}$. **e)** $\{[1,1,1,1],[-1,7,-7,1]\}$. **f)** $\{[2,3,0,6],[0,-2,2,1]\}$. **g)** $\{[1,1,1,1],[1,-1,-1,1],[1,1,-1,-1]\}$. **h)** $\{[1,7,1,7],[-1,0,1,0],[0,1,0,-1]\}$.

Ejercicio 7.20 **a)** $Q = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3/5 & -4/5 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **b)** $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 5/\sqrt{3} \\ 0 & 6/\sqrt{2} & 6/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4/\sqrt{6} \end{bmatrix}$. **d)** $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. **d)** $Q = \begin{bmatrix} 5/7 & -2/7 \\ 4/7 & 2/7 \\ 2/7 & 5/7 \\ 2/7 & -4/7 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$. **e)** $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/10 \\ 1/2 & 7/10 \\ 1/2 & -7/10 \\ 1/2 & 2/10 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$. **f)** $Q = \begin{bmatrix} 2/7 & 0 \\ 3/7 & -2/3 \\ 0 & 2/3 \\ 6/7 & 1/3 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **g)** $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **h)** $Q = \begin{bmatrix} 1/10 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 7/10 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/10 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 7/10 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Ejercicio 7.21 **a)** $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. **b)** $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

---

8 Míminos Cuadrados

Ejercicio 8.1 $[2, 0, 2]$.

Ejercicio 8.2 $[1, 1, 1, 0]$.

Ejercicio 8.3 **a)** $[x, y] = [1, 1]$, $e = 1$. **b)** $[x, y] = [1 - 3t, t]$, $e = 2\sqrt{5}$.

Ejercicio 8.4 $\vec{s} = [5/3, -2]$.

Ejercicio 8.5 **a)** $a = 1/2$, $b = 1/2$, error $= 1/\sqrt{2}$. **b)** $a = 1/2$, $b = 1/2 - s$, $c = s$, $\forall s \in \mathbb{R}$, error $= 1/\sqrt{2}$. **c)** $b = 1$, error $= 1$. **d)** $a = 2/3$, error $= \sqrt{6}/3$.

Ejercicio 8.6 $a = 3/4,\ b = 1/2,\ c = -1/2,\ \text{error} = \sqrt{5/2}$.

Ejercicio 8.7 $1/6[5, 3, 4, 2]$.

Ejercicio 8.8 **a)** $\vec{x} = [1, 0]$, $e = 0$. **b)** $\vec{x} = t[-1, 1]$, $e = \sqrt{2}$. **c)** $\vec{x} = [-t - s, t, s]$, $e = \sqrt{2}$. **d)** $\vec{x} = [0, 1]$, $e = 0$. **e)** $\vec{x} = [1 - t, t]$, $e = 0$. **f)** $\vec{x} = [0, -2/3, 1/3]$, $e = \sqrt{3}/3$.

Ejercicio 8.9 **a)** $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = [0, 0]$. **b)**. $Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = [0, 0, 1]$.

Ejercicio 8.10 **a)** $a = 0$, $b = 1/2$, $c = 1/2$, $e = \sqrt{2}$. **b)** $a = 0$, $b = \pi/2$, $c = 0$, $e = \pi\sqrt{2}$. **c)** $a = -1/5$, $b = -2/5$, $e = (2\sqrt{15})/5$.

9 Autovalores y Autovectores

Ejercicio 9.1 $\lambda = 1$.

Ejercicio 9.2 $\vec{v} = [1, 1, 0]$.

Ejercicio 9.3 $\{\lambda_1 = 0,\ \vec{v}_1 = t[1, 1],\ E_0 = \{[1, 1]\}\}$, $\{\lambda_1 = 2,\ \vec{v}_2 = t[-1, 1],\ E_2 = \{[-1, 1]\}\}$.

Ejercicio 9.4 **(1)** $p(\lambda) = (1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + 2$, $p(\lambda) = 0$. **(2)** $\{\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 3\}$. **(3)** $E_0 = \{[-1, 1, 0],\ [-1, 0, 1]\}$, $E_3 = \{[1, 1, 1]\}$. **(4)** $\lambda_{1,2} = \{MA = 2,\ MG = 2\}$, $\lambda_3 = \{MA = 1,\ MG = 1\}$. **(5)** $A = PAP^{-1}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **(6)** $A = QAQ^{-1}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.5 $\lambda = \{6, -2 \text{ (doble)}\}$, $E_6 = \{[3, 2, 3]\}$, $E_{-2} = \{[0, 1, -1], [1, 0, -1]\}$.

Ejercicio 9.6 No diagonalizable.

Ejercicio 9.7 **a)** $[3 * 2^{10} + 2^{-9}, 3 * 2^{10} - 2^{-9}] \sim [3 * 2^{10}, 3 * 2^{10}]$. **b)** $A^k\vec{x} = 2^{1-k}[1, -1] + 3 * 2^k[1, 1]$. Si $k \to \infty$ $A^k\vec{x} \to [\infty, \infty]$. **b)** $A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{-101} + 2^{99} & -2^{-101} + 2^{99} \\ -2^{-101} + 2^{99} & 2^{-101} + 2^{99} \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.8 $A = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.9 **a)** $\lambda = 3$. **b)** $\lambda = -3$. **c)** $\lambda = 3$. **d)** $\lambda = 3$. **e)** $\lambda = 0$.

Ejercicio 9.10 **a)** $\vec{v} = [2, 1]$. **b)** $\vec{v} = [4, 1]$. **c)** $\vec{v} = [4, 4]$. **d)** $\vec{v} = [1, 1, -1]$. **e)** $\vec{v} = [0, 1, 1]$.

Ejercicio 9.11 **a)** $\{\lambda_1 = 0,\ \vec{v}_1 = [-1, 1]\}$, $\{\lambda_2 = 2,\ \vec{v}_2 = [1, 1]\}$. **b)** $\{\lambda_1 = 0,\ \vec{v}_1 = [0, -1, 1]\}$, $\{\lambda_2 = 1,\ \vec{v}_2 = [-1, -1, 1]\}$, $\{\lambda_3 = 2, \vec{v}_3 = [1, 1, 0]\}$.

Ejercicio 9.12 **a)** $\lambda_1 = 3$, $\vec{v}_1 = [1, 0]$, $\lambda_2 = 4$, $\vec{v}_2 = [0, 1]$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **b)** $\lambda_1 = 3$, $\vec{v}_1 = [1, 1]$, $\lambda_2 = 0$, $\vec{v}_2 = [-1, 1]$, $A = \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}$. **c)** $\nexists\{\lambda, \vec{v}\}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. **d)** $\lambda = 3$, $\vec{v} = [1, 1]$, $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.13 **a)** For example, the characteristic polynomial of A is $\lambda^2 - 5\lambda + 1$ but the one of B is $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. **b)** For example, the eigenvalues of A are 2 and 4 and the ones of B are 1 and 4.

Ejercicio 9.14
a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda$, $\lambda = \{0, 7\}$, $E_0 = \{[-3, 1]\}$, $E_7 = \{[1, 2]\}$, $m_a = m_g = 1$ en los dos autovalores.
b) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, $\lambda = \{1(doble)\}$, $E_1 = \{[1, -1]\}$, $m_a = 2$, $m_g = 1$.
c) $p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$, $\lambda = \{-2, 1, 3\}$, $E_{-2} = \{[1, -3, 0]\}$, $E_1 = \{[1, 0, 0]\}$, $E_3 = \{[1, 2, 10]\}$, $m_a = m_g = 1$ en los tres autovalores.
d) $p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$, $\lambda = \{1, 2, -1\}$, $E_1 = \{[1, -1, 0]\}$, $E_2 = \{[1, 1, 1]\}$, $E_{-1} = \{[1, 1, -2]\}$, $m_a = m_g = 1$ en los tres autovalores.
e) $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2$, $\lambda = \{0, 1\}$, $E_0 = \{[2, -1, 1]\}$, $E_1 = \{[1, 0, 1]\}$, $[\lambda = 0, m_a = 2, m_g = 1]$, $[\lambda = 1, m_a = m_g = 1]$.
f) $p(\lambda) = (1 + \lambda)(-\lambda^2 + \lambda + 3)$, $\lambda = \{-1(doble), 3\}$, $E_{-1} = \{[-1, 0, 1], [0, 1, 0]\}$, $E_3 = \{[2, 3, 2]\}$, $[\lambda = -1, m_a = m_g = 2]$, $[\lambda = 3, m_a = m_g = 1]$.
g) $p(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27)$, $\lambda = \{3(triple)\}$, $E_3 = \{[-1, 0, 1], [0, 1, 0]\}$, $m_a = 3$, $m_g = 2$.
h) $p(\lambda) = (2 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1)$, $\lambda = \{2(doble), 0\}$, $E_2 = \{[-1, 0, 1], [-1, 1, 0]\}$, $E_0 = \{[1, 0, 1]\}$, $[\lambda = 2, m_a = m_g = 2]$, $[\lambda = 0, m_a = m_g = 1]$.
i) $p(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 + 4\lambda - 12$, $\lambda = \{-1, 2(doble), 3\}$, $E_{-1} = \{[0, 0, -2, 1]\}$, $E_2 = \{[1, -1, 0, 0]\}$, $E_3 = \{[0, 0, 2, -1]\}$, $[\lambda = -1, m_a = m_g = 1]$, $[\lambda = 2, m_a = 2, m_g = 1]$, $[\lambda = 3, m_a = m_g = 1]$.
j) $p(\lambda) = (2 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda)$, $\lambda = \{2(doble), 1, 3\}$, $E_2 = \{[1, 0, 0, 0], [0, -1, 1, -1]\}$, $E_1 = \{[1, -1, 0, 0]\}$, $E_3 = \{[3, 2, 1, 0]\}$, $[\lambda = 2, m_a = m_g = 2]$, $[\lambda = 1, m_a = m_g = 1]$, $[\lambda = 3, m_a = m_g = 1]$.
k) $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 3$, $\lambda = \{-1, 1(doble), 3\}$, $E_{-1} = \{[0, 0, 0, 1]\}$, $E_1 = \{[-2, 0, 1, 3], [-2, 2, 0, 3]\}$, $E_3 = \{[0, 0, 2, 1]\}$, $[\lambda = -1, m_a = m_g = 1]$, $[\lambda = 1, m_a = m_g = 2]$, $[\lambda = 3, m_a = m_g = 1]$.
l) $p(\lambda) = (4 - \lambda)^2(\lambda^2 - \lambda - 6)$, $\lambda = \{4(doble), 3, -2\}$, $E_4 = \{[1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0]\}$, $E_3 = \{[-1, -2, 1, 1]\}$, $E_{-2} = \{[2, 5, -12, 18]\}$, $[\lambda = 4, m_a = m_g = 2]$, $[\lambda = 3, m_a = m_g = 1]$, $[\lambda = -2, m_a = m_g = 1]$.

Ejercicio 9.15 **a)** $\lambda = \{4, 3\}$, $E_4 = \{[1, 1]\}$, $E_3 = \{[1, 2]\}$. **b)** $\lambda = \{2, 0, -1\}$, $E_2 = \{[3, 1, 2]\}$, $E_0 = \{[1, -1, 0]\}$, $E_{-1} = \{[0, 1, -1]\}$.

Ejercicio 9.16 **a)** Diagonalizable, $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **b)** No diagonalizable. **c)** No diagonalizable. **d)** No diagonalizable. **e)** No diagonalizable. **f)** Diagonalizable, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 9.17 **a)** $[2, 2 - 1/3^{20}, 2] \sim [2, 2, 2]$. **b)** Si k es par: $A^k\vec{x} = [2, 2 - 1/3^k, 2]$. Si k es impar: $A^k\vec{x} = [2 - 2/3^k, 2 - 1/3^k, 2]$. Si $k \to \infty$ $A^k\vec{x} \to [2, 2, 2]$.

Ejercicio 9.18 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.19 **a)** $\forall k \in \mathbb{R}$. **b)** $k = 0$. **c)** $\forall k \in \mathbb{R}$. **d)** $k = 0$. **e)** $\forall k \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9.20 **a)** $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. **b)** $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. **c)** $Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **d)** $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 9.21 $A = \begin{bmatrix} -9/5 & 12/5 \\ 12/5 & 9/5 \end{bmatrix}$.

---

10 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ejercicio 10.1 **a)** EDO, orden 1, grado 5, no lineal. **b)** EDO, orden 3, grado 1, lineal. **c)** EDO, orden 2, grado 1, lineal. **d)** EDO, orden 4, grado 1, no lineal. **e)** EDP, orden 1, grado 2, lineal. **f)** EDP, orden 2, grado 1, no lineal.

Ejercicio 10.2 **a)** Sí. **b)** Sí. **c)** No. **d)** Sí.

Ejercicio 10.3 **a)** $y = -2/(x^2 + c)$. **b)** $(1/2)\exp(y^2) = -1/x + c$. **c)** $2[y - \log(y + 1)] = \log(cx)$. **d)** $(1 + y)e^{-y} = x^{-1} + c$.

Ejercicio 10.4 **a)** $x = (t + c)^2/4$, $c = 4$. **b)** $y = \operatorname{arcsen}(x + c)$, $c = -1$.

Ejercicio 10.5 **a)** Sí. **b)** No.

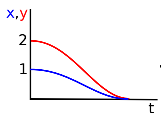
Ejercicio 10.6 $y_i = y^{(i-1)}$. **a)** $\{y_1' = y_2,\ y_2' = -y_2 + 2y_1\}$. **b)** $\{y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = y_3 - 2y_2 - 5y_1 + e^x + x - 1\}$. **c)** $\{y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = y_4,\ y_4' = -y_3 + 2y_1\}$.

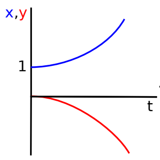
Ejercicio 10.7 **a)** No lineal, no homogéneo, no autónomo y no de coef. ctes. **b)** Lineal, no homogéneo, no autónomo y no de coef. ctes. **c)** Lineal, homogéneo, autónomo y de coef. ctes.

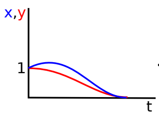
Ejercicio 10.8 **a)** $\{x = c_1e^t,\ y = c_2e^{-2t}\}$. **b)** $\{x = c_1e^t + c_2e^{-t},\ y = 2c_1e^t + c_2e^{-t}\}$. **c)** $\{x = c_1e^t + c_2e^{-t},\ y = c_2e^{-t},\ z = c_3e^{-t}\}$.

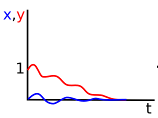
Ejercicio 10.9 $A = \begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 10.10

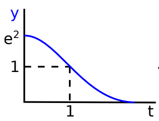
Ejercicio 10.11 **a)** $\{x = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t},\ y = 2c_1e^{-t} + 3c_2e^{-2t}\}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. 

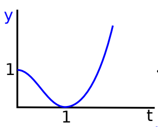
. **b)** $\{x = c_1 + c_2e^{2t},\ y = c_1 - c_2e^{2t}\}$, $c_1 = 1/2$, $c_2 = 1/2$. 

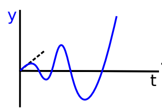
. **c)** $\{x = (c_1 + c_2t)e^{-2t},\ y = c_2e^{-2t}\}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. 

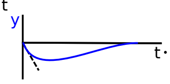
. **d)** $\{x = (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)e^{-3t},\ y = (-c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t)e^{-3t}\}$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. 

.

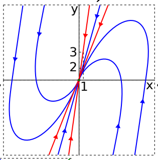
Ejercicio 10.12 **a)** $y = ce^{-2x}$. $c = e^2$. 

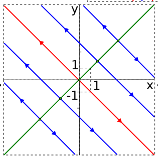
. **b)** $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$, $c_1 = 1/(1 - e^7)$, $c_2 = 1/(1 - e^{-7})$. 

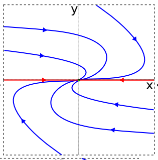
. **c)** $x = e^t(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. 

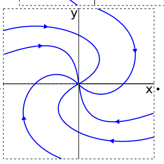
. **d)** $x = c_1 + c_2e^{-3t}$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. 

.

Ejercicio 10.13 **a)** Sistema asintóticamente estable. Punto crítico de tipo nodo. Tiene dos separatrices. 

. **b)** Sistema inestable. Infinitos puntos críticos. Tiene sólo una separatriz. 

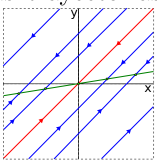
. **c)** Sistema asintóticamente estable. Su punto crítico es un nodo impropio degenerado. Tiene sólo una separatriz. 

. **d)** Sistema asintóticamente estable. Su punto crítico es una espiral. No tiene separatrices. 

.

Ejercicio 10.14 $p > 0$ espiral inestable, $p = 0$ centro uniformemente estable y $p < 0$ espiral asintóticamente estable.

Ejercicio 10.15 **a)** Espiral inestable. **b)** Espiral asintóticamente estable. **c)** Centro uniformemente estable. **d)** Todos los puntos del plano fásico son puntos críticos uniformemente estables.

Ejercicio 10.16 Las trayectorias son rectas paralelas a $\vec{v}_2$ con dirección hacia los infinitos puntos críticos situados en $\vec{v}_1$. 

Ejercicio 10.17 Los autovalores de la matriz inversa son los inversos de los autovalores de la original.

Ejercicio 10.18 **a)** Por ejemplo: $\{x' = -2x,\ y' = -2y\}$. **b)** Por ejemplo: $\{x' = x - y,\ y' = 2x - 2y\}$. **c)** $\{x' = 5x + 2y,\ y' = -12x - 5y\}$.

Ejercicio 10.19 **a)** EDO, orden 1, grado 1, lineal. **b)** EDP, orden 3, grado 2, lineal. **c)** EDO, orden 2, grado 1, no lineal. **d)** EDO, orden 2, grado 1, no lineal. **e)** EDP, orden 2, grado 1, lineal. **f)** EDP, orden 2, grado 1, no lineal.

Ejercicio 10.20 **a)** Sí. **b)** No. **c)** Sí. **d)** No.

Ejercicio 10.21 **a)** $-1/y^3 = \log(x+2) + c$. **b)** $y = cx^{3/2}$. **c)** $\cos y = c \operatorname{sen} x$. **d)** $-y^2/2 = x^2/2 + x + \log(x-1) + c$.

Ejercicio 10.22 **a)** $x = ce^t$, $c = 1$. **b)** $(1-k)x^{1-k} = t + c$, $c = 1 - k$. **c)** $x = \tan(t + c)$, $c = \pi/4$.

Ejercicio 10.23 $x' = x \log 3$.

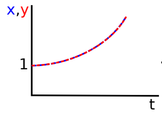
Ejercicio 10.24 **a)** Sí. **b)** Sí. **c)** Sí. **d)** No. **e)** Sí.

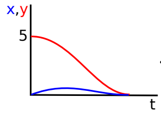
Ejercicio 10.25 $y_i = y^{(i-1)}$. **a)** $\{y_1' = y_2,\ y_2' = -4y_1\}$. **b)** $\{y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = y_3 - 2y_2 + 2y_1 + x\}$. **c)** $\{y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = y_4,\ y_4' = 3y_3 - 2y_1\}$.

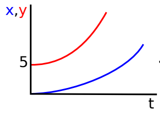
Ejercicio 10.26 **a)** Lineal, no homogéneo, no autónomo y no de coef. ctes. **b)** No lineal, homogéneo, autónomo y no de coef. ctes. **c)** Lineal, homogéneo, no autónomo y no de coef. ctes. **d)** No lineal, no homogéneo, no autónomo y no de coef. ctes. **e)** Lineal, homogéneo, no autónomo y no de coef. ctes. **f)** Lineal, homogéneo, autónomo y de coef. ctes.

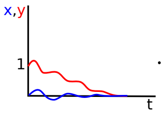
Ejercicio 10.27 **a)** $\{x = c_1e^t,\ y = c_2e^{-2t}\}$. **b)** $\{x = c_1e^t + c_2e^{-t},\ y = 2c_1e^t + c_2e^{-t}\}$. **c)** $\{x = c_1e^t + c_2e^{-t},\ y = c_2e^{-t},\ z = c_3e^{-t}\}$.

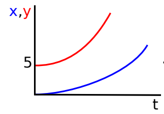
Ejercicio 10.28

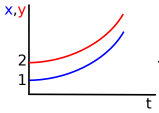
Ejercicio 10.29 **a)** $\{x = c_1e^t + c_2e^{2t},\ y = c_2e^{2t}\}$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. 

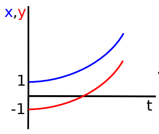
. **b)** $\{x = c_1e^{-t} - 3c_2e^{-6t},\ y = c_1e^{-t} + 2c_2e^{-6t}\}$, $c_1 = 3$, $c_2 = 1$. 

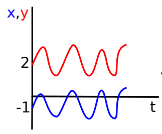
. **c)** $\{x = c_1e^{3t} - 2c_2e^{-2t},\ y = c_1e^{3t} + 3c_2e^{-2t}\}$, $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. 

. **d)** $\{x = (c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t)e^{-t},\ y = (-c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t)e^{-t}\}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. 

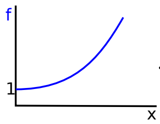
. **e)** $\{x = -2c_1 + c_2e^{5t},\ y = c_1 + 2c_2e^{5t}\}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. 

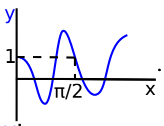
. **f)** $\{x = c_1e^t,\ y = c_2e^t\}$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. 

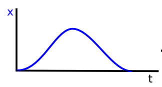
. **g)** $\{x = c_2e^t,\ y = (c_1 + c_2t)e^t\}$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. 

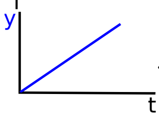
. **h)** $\{x = c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t,\ y = -c_1 \cos t + 2c_2 \operatorname{sen} t\}$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. 

.

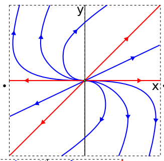
Ejercicio 10.30 **a)** $f = ce^{5x}$. $c = 1$. 

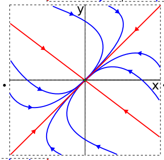
. **b)** $f = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. 

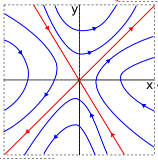
. **c)** $x = e^{-t}(c_1 + c_2t)$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. 

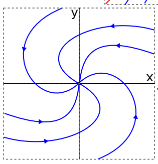
. **d)** $x = c_1 + c_2t$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. 

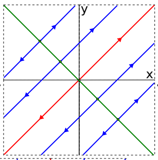
.

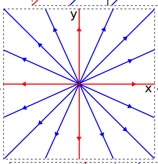
Ejercicio 10.31 **a)** Sistema inestable. Punto crítico de tipo nodo con dos separatrices.

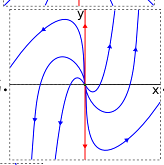
. **b)** Sistema asintóticamente estable. Punto crítico de tipo nodo con dos separatrices.

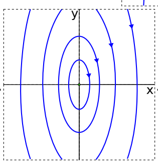
. **c)** Sistema inestable. Punto crítico de tipo punto silla con dos separatrices.

. **d)** Sistema asintóticamente estable. Punto crítico de tipo espiral sin separatrices.

. **e)** Sistema inestable. Infinitos puntos críticos con una separatriz.

. **f)** Sistema inestable. Punto crítico de tipo nodo propio degenerado con dos separatrices.

. **g)** Sistema inestable. Punto crítico de tipo nodo impropio degenerado con una separatriz.

. **h)** Sistema uniformemente estable. Punto crítico de tipo centro sin separatrices.

.

Ejercicio 10.32 **a)** $a, b \leq 0$. **b)** $|k| \leq 1$.

Bibliografía

- O. BRETSCHER, **Linear algebra with applications**, Prentice Hall. 2ª Edition. 2001.
- J. BURGOS, ***Álgebra lineal*** (Ed. McGraw-Hill, 2000)
- B. KOLMAN, ***Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab***, Sexta Edición, (Prentice Hall, 1999).
- D. C. LAY, ***Álgebra lineal y sus aplicaciones***, Segunda Edición, (Addison-Wesley, 1999).
- B. NOBLE y J. W. DANIEL, ***Álgebra lineal aplicada***, Tercera Edición, (Prentice Hall Hispanoamericana, 1989).
- D. POOLE, **Álgebra lineal, una introducción moderna**, Thomson. 2004.