CONJUNTOS

1) Definir por extensión los siguientes conjuntos y calcular su cardinal:

a) A = Los números naturales impares menores que 11

b) B = Los números naturales pares mayores que 10 y menores o iguales que 20

c) C = Los números primos menores de 15

d) $D = \{4n+1 \ / \ 17 \leq n < 41 \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$

e) $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 17 \leq 4n+1 < 41\}$

f) $F = \{2n \in \mathbb{N} \ / \ 11 \leq n \leq 19\}$

g) $G = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 11 \leq 2n \leq 19\}$

2) Definir por comprensión los siguientes conjuntos

a) $H = \{7, 9, 11, 13, 15\}$

b) $I = \{9, 13, 17, 21\}$

c) $J = \{7, 11, 15, 19, 23\}$

d) $K = \{7, 10, 13, 16, 19, 22\}$

e) $L = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

3) Determinar si los siguientes conjuntos son vacíos, finitos, o infinitos

a) A = {vocales de la palabra "conjunto"}

b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 15\}$

d) $D = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 5 < n < 5\}$

e) $E = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 15 < n\}$

f) $F = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \text{ es par}\}$

4) Probar si los siguientes conjuntos son iguales:

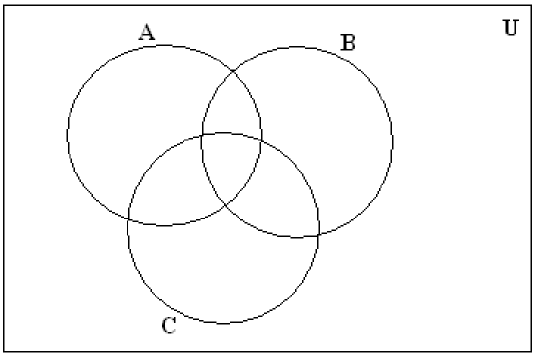
a) $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ 1 < n < 15 \text{ y } n \text{ es impar}\}$ $B = \{2a+1 \ / \ a \in \mathbb{N} \text{ y } 1 \leq a \leq 6\}$

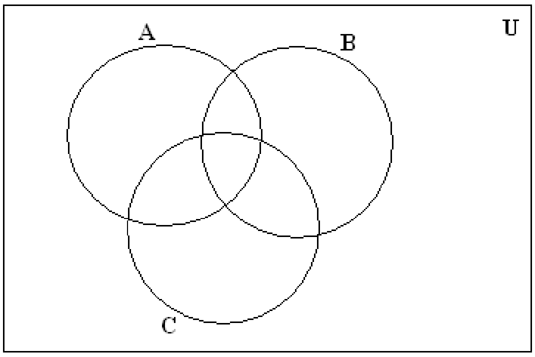
b) $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \text{ es impar}\}$ $B = \{c \in \mathbb{N} \ / \ \exists \text{ a par y } \exists \text{ b impar, tales que } c = a + b\}$

5) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$.
Hallar $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$

6) Dado el conjunto $A = \{6, 2, 8, 4\}$, obtener todos sus subconjuntos y $|P(A)|$.

7) Sombrea en el diagrama de Venn a) $A \cap B \cap C$ b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$





8) Se consideran los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Calcular

a) $A \times (B \cup C)$ y $|A \times (B \cup C)|$

b) $(A \times B) \cup (A \times C)$

c) $A \times (B \cap C)$

d) $(A \times B) \cap (A \times C)$

9) Se consideran los conjuntos A = {a, b}, B = {1, 2, 3}, C = {2, 3}. Calcular $A \times B \times C$ y $|A \times B \times C|$.

RELACIONES

1) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {1, 3, 5} y dada la relación R de A en B definida por a R b ⇔ a < b, describir los pares de la relación y su matriz.

2) Dados los conjuntos A = {2, 3, 4, 5} y B = {3, 6, 7, 10} y dada la relación R de divisibilidad de A en B, describir los pares de la relación y su matriz.

3) Hallar el dominio y la imagen de cada una de las siguientes relaciones:

a) $R = \{(1,5),\ (4,5),\ (1,4),\ (4,6),\ (3,7),\ (7,6)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) R definida en $\mathbb{N}$ por $x\,R\,y \Leftrightarrow 2x + y = 16$

c) R definida en $\mathbb{N}$ por $x\,R\,y \Leftrightarrow 3x + y = 25$

4) Sea A = {a, b, c, d} y R la relación en A cuya matriz es: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Determinar los conjuntos $E = \{x \in A / (x, b) \in R\}$ y $F = \{x \in A / (d, x) \in R\}$ y la matriz de R^{-1}.

5) En el conjunto A = {a, b, c, d} se definen las relaciones R = {(b, b), (b, c), (a, d), (d, b)} y S = {(a, b), (c, a), (d, a)}. Hallar:

a) La matriz y el digrafo de R, de S y de la composición $R \circ S$.

b) R^{-1}, $(R \circ S)^{-1}$, $S \circ R$, $(S \cup R)^{-1}$.

c) DomR e $\mathrm{Im}S^{-1}$.

6) Estudiar si las siguientes relaciones son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas:

a) R_1 = {(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 5)} en A = {1, 2, 3, 4, 5}.

b) la relación $a\ R\ 2b \Leftrightarrow a \leq b$ en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) la relación R en $A = \{a, b, c, d\}$ cuya matriz es: $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) la relación R definida en $\mathbb{Z}$ por: $a\ R\ b \Leftrightarrow a - b = 3k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Relaciones de equivalencia

1) Sea el conjunto P(A) de todos los subconjuntos de $A = \{a, b, c\}$ y la relación en P(A), definida por $M\ R\ N \Leftrightarrow M \cap N \neq \emptyset$. Obtener la matriz que representa la relación y averiguar si es una relación reflexiva, simétrica y/o transitiva.

2) En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, se define la relación: $aRb \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b$.

Averiguar si es relación de equivalencia y en su caso, hallar la clase de equivalencia de 5.

3) En el conjunto de los números naturales menores que 15, se considera la siguiente relación:

$a\ R\ b \Leftrightarrow$ el resto de dividir a entre 7 coincide con el resto de dividir b entre 7.

a) Describir los pares de la relación y dibujar el digrafo de la relación.

b) Estudiar sus propiedades y encontrar todos los elementos relacionados con el 1.

4) En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Averiguar si es de equivalencia y, si lo es, calcular la clase de equivalencia del elemento $[(4, 8)]$.

5) En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b)\ R\ (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Averiguar si es de equivalencia y, si lo es, calcular la clase del elemento $[(2,5)]$.

APLICACIONES

1) En $A = \{a, b, c, d\}$ se consideran las relaciones siguientes:

a) $R_1 = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$

b) $R_2 = \{(d, c), (c, b), (a, b), (d, d)\}$

c) $R_3 = \{(a, a), (b, a), (c, a), (d, d)\}$

d) $R_4 = \{ (b, a), (a, c), (d, d)\}$

Averiguar cuáles son aplicaciones y cuáles no lo son.

2) Estudiar si las siguientes relaciones son aplicaciones y en caso afirmativo estudiar si son inyectivas, suprayectivas y / o biyectivas:

a) Dados $a, b \in \mathbb{N}$, $a\ R\ b \Leftrightarrow a + b = 1$.

b) Dados $a, b \in \mathbb{N}$, $a\ R\ b \Leftrightarrow a + 2b = 1$.

c) Dados $a, b \in \mathbb{N}$, $a\ R\ b \Leftrightarrow 2a + b = 1$.

d) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x\ R\ y \Leftrightarrow x^2 = y$.

e) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x\ R\ y \Leftrightarrow x = y^2$.

f) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x\ R\ y \Leftrightarrow x = 2y + 3$.

g) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x\ R\ y \Leftrightarrow 2 \cdot x^2 = y + 3$.

3) Demostrar que la función $f\colon N \to Z$ definida por $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, si\ n\ es\ par \\ \frac{n-1}{2}, si\ n\ es\ impar \end{cases}$ es aplicación.

Estudiar si f es inyectiva y/o suprayectiva.