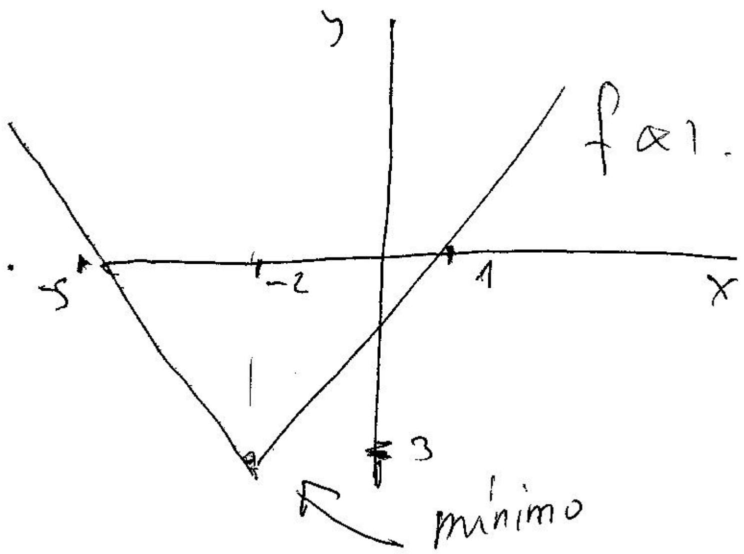
Hoja 4.

Problema 2: Esbozar las gráficas de

a) $f(x) = |x+2|-3$: $x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$, y

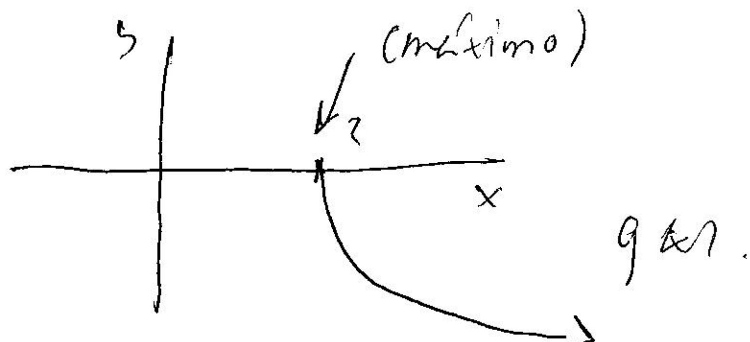
entonces $f(x) = \begin{cases} -(x+2)-3 = -x-5, & x \leq -2 \\ (x+2)-3 = x-1, & x \geq -2 \end{cases}$

$\cdot\ f(-2) = -3$ $\begin{cases} f \text{ decrece en } (-\infty,-2] \\ f \text{ crece en } [2,\infty) \end{cases}$



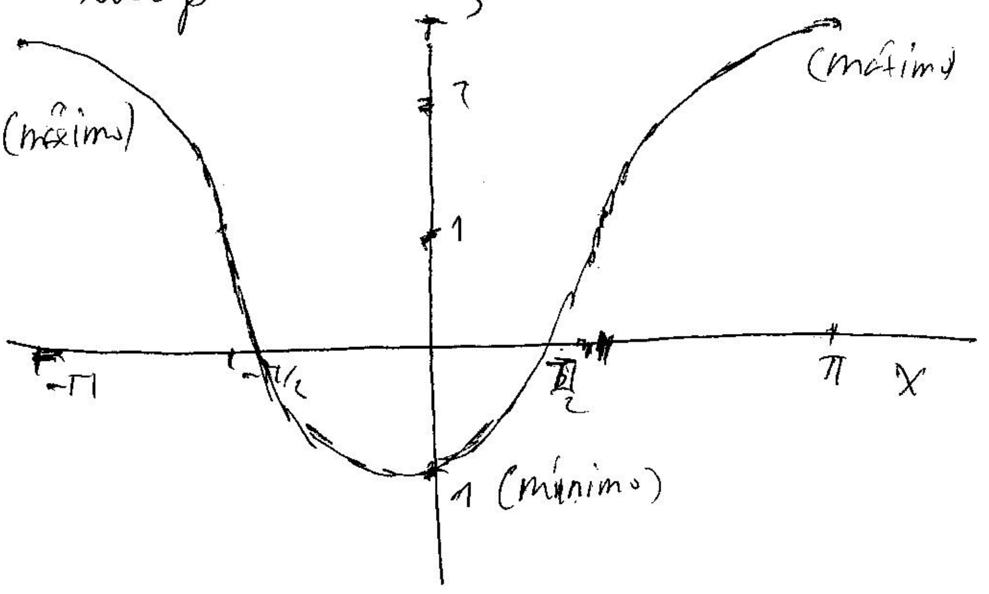
b) $g(x) = -\sqrt{x-2}$: $Dom(g) = [2,\infty)$

$g(2) = 0$

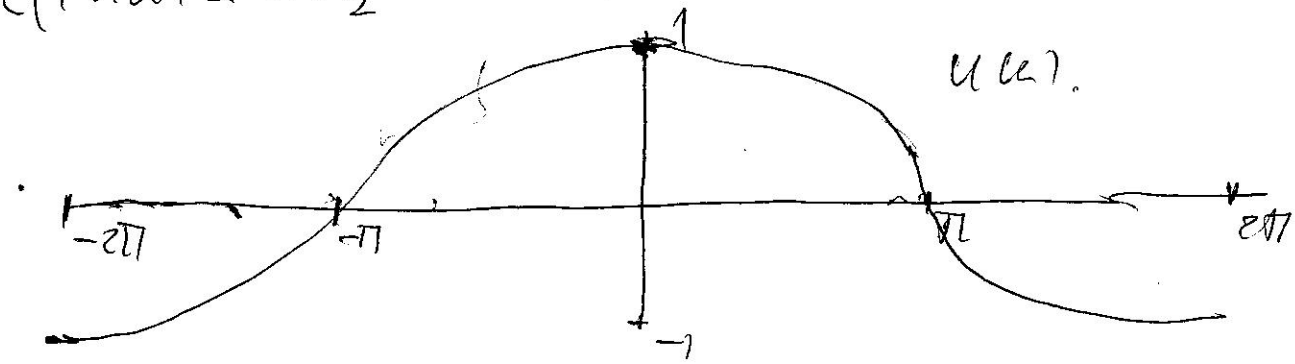


c) $h(x) = -2\cos x + 1$: es periódica de período 2π, luego basta determinarla para $-\pi \le x \le \pi$:

$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -1 \le h(x) \le 3$.



d) $u(x) = \cos\frac{x}{2}$; es periódica de período 4π

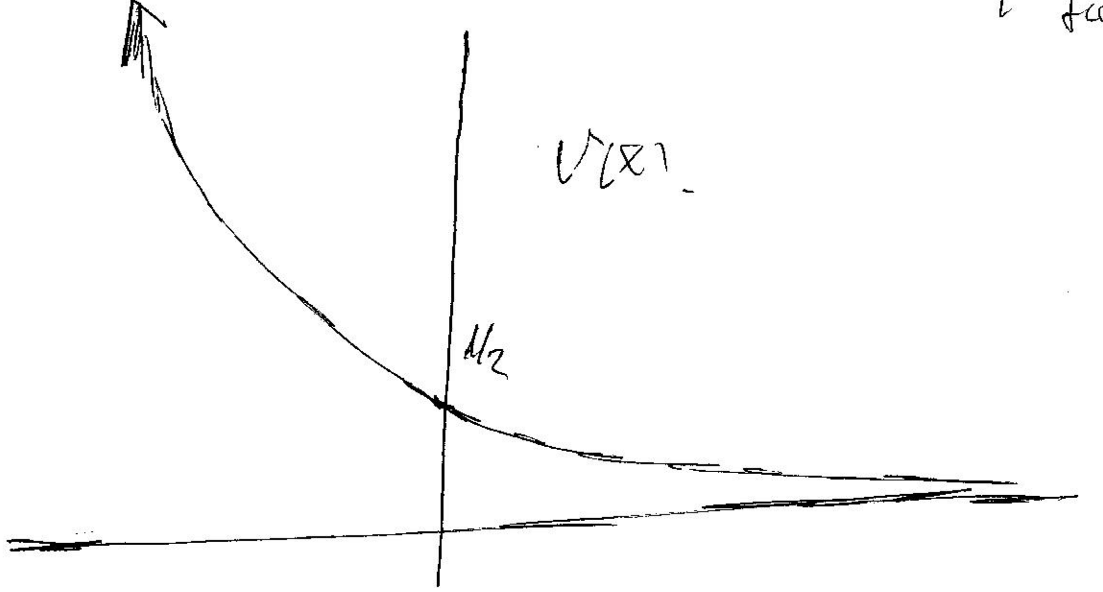


e) $v(x) = \frac{e^{-x}}{2}$: decrece en todo $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

$f(x) > 0 \ \forall x$.



2)

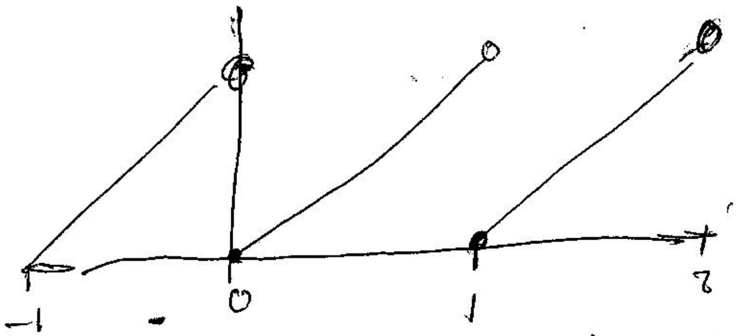
H4)

16) Gráfica y continuidad de:

a) $f(x) = x - [x]$ ($= \{x\}$: "parte fraccionaria de")

Sabemos que $f(x)$ es periódica de periodo 1.

. Para $0 \le x \le 1$, $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$



$f(x)$.

. Si $x \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow k < x < k+1$ (con $k = [x] \in \mathbb{Z}$).

y $f(x) = x - k$, que es continua en el intervalo $(k, k+1)$,

y en particular, en x.

. Si $x \in \mathbb{Z}$, $f(y) = \begin{cases} y - x, & x \le y < x+1 \\ y - x + 1, & x-1 < y < x \end{cases}$,

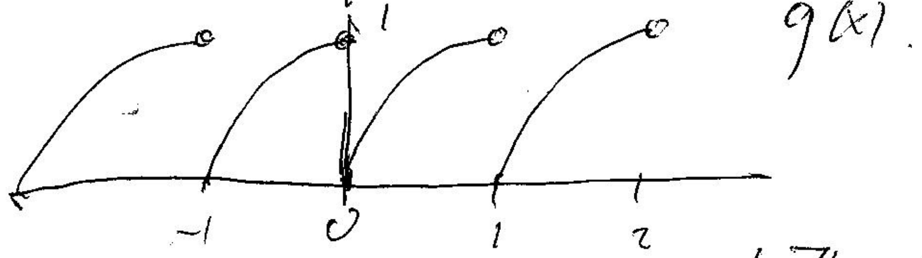
por lo cual $\begin{cases} \lim\limits_{y \to x+} f(y) = \lim\limits_{y \to x+} (y - x) = 0, \\ \lim\limits_{y \to x-} f(x) = \lim\limits_{y \to x+} (y - x + 1) = 1 \end{cases}$

y f presenta una discontinuidad de salto en x.

b) $g(x) = \sqrt{x-[x]} = \sqrt{f(x)}$ (con f de $A6a)$)

Como $f(x) \geq 0$, $Dom(g) = \mathbb{R}$ y g es asimismo periódica de periodo 1. Para $0 \leq x \leq 1$

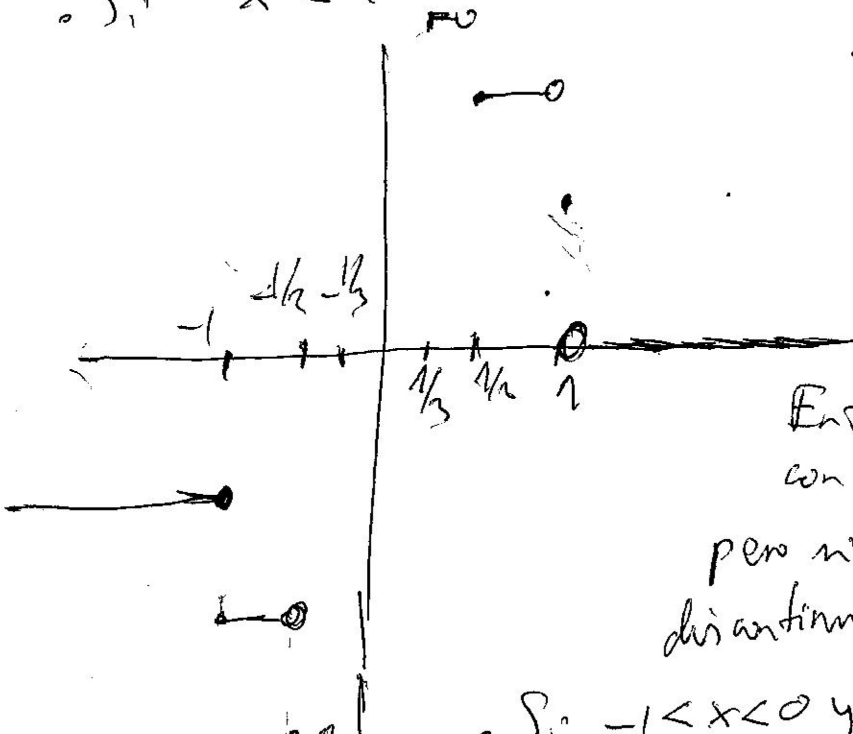
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$



- g es continua en x si $x \notin \mathbb{Z}$, y presenta una discontinuidad de salto en x, si $x \in \mathbb{Z}$

c) $h(x) = [1/x]$: $Dom(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

- Si $x > 1 \Rightarrow 0 < 1/x < 1 \Rightarrow h(x) = 0$; $h(1) = 1$
- Si $x < -1 \Rightarrow -1 < 1/x < 0 \Rightarrow h(x) = -1$; $h(-1) = -1$



- Supongamos $0 < x < 1$ y $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2 \ldots)$
$\Leftrightarrow k \leq \frac{1}{x} < k+1$
$\Leftrightarrow [1/x] = k$.

Entonces, si $0 < x < 1$ y $x \neq \frac{1}{k}$ con $k \in \mathbb{Z}$, f es continua en x, pero si $0 < x < 1$ y $x = 1/k$, f tiene discontinuidad de salto en x.

- Si $-1 < x < 0$ y $-\frac{1}{k} \leq x < \frac{-1}{k+1}$ $(k = 1, 2 \ldots)$,
$\Leftrightarrow -(k+1) > x \geq -k \Leftrightarrow [1/x] = -k$, y

de esto se sigue que si $-1 < x < 0$ con $x \neq -1/k$, $k \in \mathbb{Z}$, f es continua en