PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS II(*TEMA* 3) **1º A**

HOJA Nº 5 (07 – 11 – 2014)

37. Determina de las siguientes aplicaciones las que son lineales. Para estas aplicaciones lineales determina su núcleo y su imagen, calculando una base para cada uno de estos subespacios

$$f_1 : \underset{(x,y,z) \mapsto (x+y,\, z)}{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} \qquad f_2 : \underset{(x_1,x_2) \mapsto (4x_1-2x_2,\, 3|x_2|)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2} \qquad f_3 : \underset{(x_1,x_2) \mapsto (x_1,\, x_2+2)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}$$

$$f_4 : \underset{(x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1^2,\, x_2+x_3)}{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2} \qquad f_5 : \underset{(x_1,x_2) \mapsto x_1-x_2}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} \qquad f_6 : \underset{(x,y,z) \mapsto (2x+y,\, -z,\, 0)}{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$$

38. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(x,y,z,t) = (x+y-z, x+2y+z+t, -x-3y-3z-2t)$. Encuentra una base y la dimensión de $\mathrm{Im}(f)$ y $\ker(f)$

39. Se pide lo mismo que en el problema anterior para la aplicación

$$g : \underset{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1-x_2+x_3,\, x_4,\, -x_1+x_2-x_3+x_4)}{\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3}$$

40. Encuentra una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuya imagen esté generada por $(1,2,0,-4)$ y $(2,0,-1,-3)$

41. Explica por qué una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,-1) = (3,-1)$ y $f(-2,2) = (-6,2)$ no puede determinarse de forma única. Halla, al menos, dos de esas aplicaciones lineales.

42. Halla una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen esté generada por $(1,2,3)$ y $(4,5,6)$

43. Halla una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuyo núcleo esté generado por $(1,2,3,4)$ y $(0,1,1,1)$

44. Se define una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(1,0,0,0) = (1,2,3) \qquad f(1,1,0,0) = (0.1.1)$$
$$f(1,1,1,0) = (2,0,1) \qquad f(1,1,1,1) = (2,1,-1)$$

escribe las ecuaciones de f y determina los subespacios: $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

45. Sea $B = \{\underline{u_1} = (1,-1,0,0),\ \underline{u_2} = (1,1,0,0),\ \underline{u_3} = (0,0,1,1),\ \underline{u_4} = (0,0,1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Demuestra que existe un único endomorfismo f en $\mathbb{R}^4$ que verifica:

$$Ker(f) = L(\{\underline{u_1} + \underline{u_2},\ \underline{u_3} + \underline{u_4} - \underline{u_1}\}),\ f(\underline{u_1}) = 2\underline{u_1} \text{ y } f(\underline{u_3}) = 2\underline{u_3}$$

46. Con el endomorfismo f determinado en el problema anterior, determina una base de $\mathrm{Im}(f)$ y prueba que $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son subespacios suplementarios de $\mathbb{R}^4$.

47. Sea **V** un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $B = \{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \underline{v_3}\}$ una base de **V**. Sean los vectores de **V**: $\underline{u_1} = (2,-1,0)$, $\underline{u_2} = (1,0,1)$, $\underline{u_3} = (1,-1,-1)$ respecto de B, y $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ una aplicación lineal tal que:

$$f(\underline{v_1}) = 3\underline{u_1} - \underline{u_2},\ f(\underline{v_2}) = \underline{u_1} + \underline{u_3},\ f(\underline{v_3}) = \underline{u_2} - 2\underline{u_3}$$

Se pide:

PROBLEMAS DE MÉTODOS MATEMÁTICOS II (*TEMA* 3) **1º A**

HOJA Nº 6 (07 – 11 – 2014)

49. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que $\ker(f) = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 / \, x_1 - x_3 = 0,$ $x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$, $f(1,0,0,0) = (1,0,1,1)$ y $f(0,1,0,0) = (1,-2,1,-1)$, calcula $f(0,0,1,0)$ y $f(0,0,0,1)$. Determina M_f e $\mathrm{Im}(f)$.

50. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_3 - x_2,\ x_1 - x_2 + 2x_3,\ 2x_1 - x_2 + 3x_3)$$

Si $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ siendo $\underline{u}_1 = (1,1,1)$, $\underline{u}_2 = (0,1,1)$ y $\underline{u}_3 = (0,0,1)$, determina M_f y $M_f(B)$.

51. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x_1,x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ x_1 + 4x_2)$$

y $B = \{\underline{v}_1 = \underline{e}_2, \underline{v}_2 = \underline{e}_1\}$ y $B' = \{\underline{v}_1' = \underline{e}_3, \underline{v}_2{}' = \underline{e}_2, \underline{v}_3{}' = \underline{e}_1\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (recordamos que $\underline{e}_i$ representa los vectores de la base canónica correspondiente).

a) Determina $M_f(B,B')$

b) Halla $f(-4,6)$

52. Siendo $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1,x_2) = (x_2, x_1, x_1 - x_2)$$

Si $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ siendo $\underline{u}_1 = (2,-1)$, $\underline{u}_2 = (1,3)$ y $B' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ siendo $\underline{v}_1 = (2,0,1)$, $\underline{v}_2 = (-1,1,-1)$ y $\underline{v}_3 = (0,2,0)$. Calcula: M_f y $M_f(B,B')$

53. Sea $f \in L(\mathbb{R}^3)$ el endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_2, x_2 + x_3, 2x_1)$$

averigua si es un automorfismo y determina $M_{f \circ f}$

54. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 5 y $f :\ \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ un endomorfismo. Sea $B = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4, \underline{v}_5\}$ una base de V tal que $\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \in \ker(f)$ y $f^2(\underline{v}_5) = f(f(\underline{v}_5)) = \underline{v}_1 + 3\underline{v}_2 + \underline{v}_4$. Si $f^3 = f$ encuentra $M_{f^2}(B)$. Estudia si f es un automorfismo.

55. Halla $M_{f \circ g}(B,B')$ siendo

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+z, x+2z) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-4y, x-y) \end{array}$$

$B = \{(1,1),(0,-1)\}$ y $B' = \{(0,1),(-1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$

56. Sea $f :\ V \to V'$ tal que

$$f(\underline{u}_1) = \underline{u}_1' - 3\underline{u}_2',\ f(\underline{u}_2) = 4\underline{u}_1' + \underline{u}_2'$$

siendo $B = \{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ una base de V y $B' = \{\underline{u}_1', \underline{u}_2'\}$ una base de V'. Determina las ecuaciones de f en B y B'.