

HOJA DE EJERCICIOS 3
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1.

a) Sea (X, d) un espacio métrico y sea $a \in X$. Demuestra que la siguiente función es continua:

$$d_a : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_a(x) = d(x, a).$$

b) Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Demuestra que la norma es continua.

Problema 2. Sea $(x_j, y_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{R}^2 . Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, demuestra que

$$(x_j, y_j) \rightarrow (a, b) \text{ en } (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) \iff \begin{cases} x_j \rightarrow a \\ y_j \rightarrow b \end{cases}$$

Generalízalo a \mathbb{R}^n .

Problema 3. Discutir cuáles de los siguientes conjuntos son compactos:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1\}.$$

Problema 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a $x \in X$. Demuestra que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto.

Problema 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Recordemos la función dist del Problema 9 de la Hoja 1.

Dado $E \subseteq X$, demuestra:

a) $x \in \bar{E}$ si y sólo si $\text{dist}(x, E) = 0$

b) x es exterior a E si y sólo si $\text{dist}(x, E) > 0$.

c) x es interior a E si y sólo si $\text{dist}(x, X \setminus E) > 0$.

Problema 6. Sea (X, d) un espacio métrico. Recordemos la función dist del Problema 9 de la Hoja 1. Sea $A \subseteq X$ compacto no vacío. Demuestra que para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $\text{dist}(x, A) = d(x, a)$.

Problema 7. Sea $1 < p < \infty$. Demuestra que para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_p \leq \|v\|_1 \leq n \|v\|_{\infty}.$$

Indicación: puede ser de ayuda el ejercicio 5 de la Hoja 1.

Problema 8. Sea $(F, \|\cdot\|_F)$ un espacio normado, sea $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ una norma en \mathbb{R}^n y sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ una aplicación lineal. Demuestra que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con $\|x_0\|_{\mathbb{R}^n} = 1$ tal que $\|T\| = \|Tx_0\|_F$.

Problema 9. En \mathbb{R}^n , consideremos $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. Demuestra lo siguiente:

a) Los subconjuntos $B(0, 1) \cup B(2e_1, 1)$ y $\bar{B}(0, 1) \cup \bar{B}(3e_1, 1)$ no son conexos por caminos.

b) Los subconjuntos $B(0, 1) \cup B(2e_1, 1) \cup \{e_1\}$ y $\bar{B}(0, 1) \cup \bar{B}(3e_1, 1) \cup \{te_1 : 1 < t < 2\}$ son conexos por caminos.

Problema 10. Demostrar que, en \mathbb{R} , el complementario de $[0, 1]$ no es conexo por caminos, pero en \mathbb{R}^n con $n \geq 2$, el complementario de $[0, 1]^n$ sí es conexo por caminos.

Problema 11. Sea X conexo por caminos y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. ¿Qué se puede decir de f si $f(X) \subset \mathbb{Z}$? ¿Y si $f(X) \subset \mathbb{Q}$? ¿Y si $f(X) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

