

MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA – 2014/2015

Hoja de problemas 2. Límites y continuidad

2-1. Sean $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$.

- a) Hallar el dominio y la imagen de estas funciones;
- b) Hallar $f(g(2))$ y $g(f(2))$;
- c) Hallar $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Sol. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\} = R(f)$, $D(g) = \mathbb{R}$, $R(g) = [-1, +\infty)$; c) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2} - 1$.

2-2. Hallar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(\sin x)$ b) $g(x) = \ln(\sin^2 x)$ c) $h(x) = \ln \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

Sol. a) $D(f) = \{x : \sin x > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $R(f) = (-\infty, 0]$; b) $D(g) = \{x : \sin x \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$, $R(g) = (-\infty, 0]$; c) $D(h) = (1, 3)$, $R(h) = (-\infty, 0]$.

2-3. Repasar las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = e^x$ c) $f(x) = \ln x$ d) $f(x) = \sin x$.

En cada caso dibujar las gráficas de las funciones siguientes a partir de las anteriores, interpretando geoméricamente los resultados.

i) $g(x) = f(x+1)$ ii) $h(x) = -2f(x)$ iii) $p(x) = f(3x)$
iv) $s(x) = f(x)+1$ v) $r(x) = |f(x)|$ vi) $m(x) = f(|x|)$

2-4. Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones crecientes. Discutir la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a) $f + g$ es una función creciente;
- b) fg es una función creciente;
- c) $f - g$ es una función creciente si ambas funciones son positivas;
- d) $f - g$ es una función creciente si ambas funciones son negativas.

Sol. a) Cierto; b) Falso: $f(x) = g(x) = x$ y $(fg)(x) = x^2$ no es creciente. Sin embargo, es cierto si ambas funciones son positivas; c) Falso: considerar $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ en $(0, +\infty)$; Falso: considerar $f(x) = x$, $g(x) = 2x$ en $(-\infty, 0)$.

2-5. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones monótonas. Discutir cuando será $g \circ f$ creciente o decreciente dependiendo del comportamiento de f y g (en total, cuatro casos).

Sol. a) f, g ambas crecientes o ambas decrecientes; b) Una de ellas creciente y la otra decreciente.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$(-\infty, 1) \cup]1, +\infty)$ y $g = (-\infty, 1) \cup]1, +\infty)$ y $g = (-\infty, 1) \cup]1, +\infty)$.

2-7. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^3 - 5)^5; \quad g(x) = (\sqrt[3]{x-5})^5; \quad h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right); \quad i(x) = \frac{3x-1}{x-3}; \quad j(x) = \begin{cases} x+3 & -3 \leq x \leq 0 \\ -2x & 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Sol. a) $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{5 + \sqrt[5]{x}}$; b) $g^{-1}(x) = 5 + (\sqrt[5]{x})^3$; c) $h^{-1}(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$; d) $i^{-1}(x) = i(x)$; e) $j^{-1}(x) = \begin{cases} x-3, & \text{si } 0 \leq x \leq 3; \\ -x/2, & \text{si } -6 \leq x < 0. \end{cases}$

2-8. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos:

a) $f(x) = \cos 5x$ b) $g(x) = \sen 2x$ c) $h(x) = \cos 5x \sen 2x$ d) $k(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$
 e) $l(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$ f) $m(x) = \frac{x^3}{x^5 + 1}$ g) $n(x) = \frac{\arctan x}{x}$

2-9. Sea f una función par y g una función impar. Demuestra que:

$|g|$ es par; $f \circ g$ es par; $g \circ f$ es par; fg es impar; g^k es par (impar) si k es par (impar).

2-10. Determinar cuáles de las siguientes funciones son periódicas, y calcular su periodo:

$f(x) = \sen 4x$; $g(x) = \tan\left(\frac{x}{3}\right)$; $l(x) = \sen(3x + 2)$.

2-11. Sea f una función cualquiera y g una función periódica. ¿Es posible afirmar que $f \circ g$ y $g \circ f$ sean periódicas?

Justifica que $f(x) = \frac{\tan^2 3x + \ln(\tan 3x)}{1 + \tan 3x}$ es periódica.

2-12. Calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 2x^2 - x}{5x^2 + 2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x^3} + 3x^4}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sen x}{x}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cos x + 1}{x^2 + 1}$
 g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + x + 2}{x^2 - 7x + 1}$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - ax^3}{x^2 + 1}$ i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^3}{x^2 + b}$.

Sol. a) $-1/2$; b) 7 ; c) $1/2\sqrt{2}$; d) $1/\sqrt{3}$; e) 0 ; f) \exists ; g) $-\infty$; h) $+\infty$; i) $0 \forall b$.

2-13. Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} = 1$, calcular:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen^2(2x)}{x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sen(x^2 - 1)}{x - 1}$

Sol. a) 4 ; b) 2 ; c) 3

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2-15. Calcular:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2}{x^2 - 9}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2 - 9}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\text{sen } x}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 1/x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{x^3}.$$

Sol. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) 0; $-\infty$.

2-16. Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}; \quad g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}; \quad h(x) = \sqrt{x^2 - 1}; \quad m(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad n(x) = e^{1/x}.$$

Sol. a) $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales, $y = x$ es asíntota oblicua en $\pm\infty$; c) $y = x$ es asíntota oblicua en $+\infty$ y $y = -x$ lo es en $-\infty$; d) $x = 1$ es asíntota vertical y $y = 0$ es asíntota horizontal; e) $x = 0$ es asíntota vertical y $y = 1$ es asíntota horizontal en $\pm\infty$.

2-17. Hallar las discontinuidades (si las hay) de las funciones que siguen:

$$\text{a) } f(x) = \frac{|x - 3|}{x - 3}; \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x + \pi & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{x \text{ sen } x}{1 - \cos x} & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x + 1}{-x} & \text{si } x \leq -1. \\ -1/2(1 - x^{-2}) & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{\text{sen } \pi x}{\pi} - 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \quad \text{d) } (*)f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x + 1} & \text{si } x < -1. \\ e^{1/x} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \pi & \text{si } x = 0 \\ 1/x & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

Sol. a) discontinua en $x = 3$; b) no es continua en $x = 0$ ni en $x = \pi/2$; c) no es continua en $x = 1$; d) no es continua en 0.

2-18. Demuestra que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

2-19. a) Usar el teorema de los valores intermedios para comprobar que las funciones que siguen tienen un cero en el intervalo indicado:

$$\text{i) } f(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ en } [2, 4]; \quad \text{ii) } f(x) = x^3 + 3x - 2 \text{ en } [0, 1].$$

b) Obtener mediante particiones del intervalo y aplicaciones sucesivas de Bolzano, el cero con un error de ± 0.25 .

Sol. i) $f(3) = 0$, luego $x = 3$ es un cero de f con total exactitud; ii) $f(1/2) = 1/8 + 3/2 - 2 < 0$ y $f(1) = 2 > 0$, luego $x = 0.75$ es un cero aproximado con error menor que ± 0.25 .

2-20. Comprueba que las ecuaciones $x^4 - 11x + 7 = 0$ y $2^x - 4x = 0$ tienen al menos dos soluciones.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

... mínimos globales en 0 y en π ; d) mínimo global en 1, máximo global en -1 .

Cartagena99

2-22. Sustituir en el problema anterior el intervalo dado por $[0, \infty)$ o por \mathbb{R} en cada una de las funciones.

Sol. En $[0, \infty)$: a) Mínimo global en 0, no existe máximo global; b) Mínimo global en 0, no existe máximo global; c) mínimos globales en $(3/2)\pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, máximos globales en $(1/2)\pi + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$; d) máximo global en 0, no existe mínimo global.

En \mathbb{R} : a) Mínimo global en 0, no existe máximo global; b) no existen máximo ni mínimo globales; c) mínimos globales en $(3/2)\pi + 2k\pi$, k entero, máximos globales en $(1/2)\pi + 2k\pi$, k entero; d) No existen máximo ni mínimo globales.

- 2-23. a) Sea $C(x) = \frac{3x^2 + x}{x - 1} + 100$, la función de costes totales de producción, suponiendo $x \geq 7$. Comprueba si tiene asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$.
 b) Considera la función $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$, es decir, los costes medios de producción. Comprueba que tiene asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$.
 c) ¿Hay alguna relación entre la asíntota oblicua de la parte a) y la horizontal de la parte b)?

Sol. a) $y = 3x + 104$ es asíntota oblicua; b) $y = 3$.

2-24. Una entidad bancaria ofrece una cuenta corriente con las siguientes condiciones: los primeros 15.000 euros sin remunerar, y el resto al 7% de interés anual. Considera la siguiente función $i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $i(x)$ = "interés obtenido en % al depositar un capital x y mantenerlo durante un año".

- i) Obtener $i(x)$;
- ii) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} i(x)$;
- iii) ¿Existe algún capital c para el que $i(c) = 7$?
- iv) ¿A partir de qué capital se obtiene al menos un 6% de interés?
- v) Dibuja la función i .

Sol. i) $i(x) = 7(x - 250.000)/x$ si $x \geq 250.000$; $i(x) = 0$ si $x < 250.000$; ii) 7; iii) No; iv) $x = 1.750.000$.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70