Cálculo II. Primer curso de ingeniería informática. Curso 2012/2013.

Hoja 2

1.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

(*a*) $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen} xy$.

(*b*) $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2},}$ definida en los $(x,y) \neq (0,0)$.

(*c*) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$, definida para los $x\,y \neq 1$.

2.- Considérese la función definida en los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x,y) = \frac{x\,y^2}{x^2+y^4} \qquad \text{si } x \neq 0, \qquad\qquad f(0,y) = 0.$$

(*a*) Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen y calcular su valor.

(*b*) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(*c*) ¿Es $f(x,y)$ diferenciable en $(0,0)$?

(*d*) Hallar la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0,0)$ para cada dirección $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

3.- Demuéstrese que la función $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ es continua en todo el plano y tiene derivadas parciales en $(0,0)$, pero no es diferenciable en el origen.

4.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ que no son continuas en el punto $(0,0)$ y que, sin embargo, $f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

5.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(*a*) $f(x,y) = e^x \cos y$.

(*b*) $f(x,y,z) = \log(x^2 + 2\,y^2 - 3\,z^2)$.

(*c*) $f(x,y) = xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

6.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en el punto $a \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que $D_{\mathbf{u}}f(a) = \sqrt{2}$ y $D_{\mathbf{v}}f(a) = \sqrt{13}$ siendo $\mathbf{u} = (2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13})$ y $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Representar gráficamente las direcciones $\mathbf{w}$ para las cuales $D_{\mathbf{w}}f(a) = \sqrt{26}$. Calcular el gradiente $\nabla f(a)$.

7.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(*a*) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.

(*b*) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(*c*) $f(x,y,z) = z^2\, e^x \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(*d*) $f(x) = (e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

8.- Hallar la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de la funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

9.- Sea $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \dfrac{x-y}{2}, v = \dfrac{x+y}{2}$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

10.- Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, $u(t) = f(x(t), y(t))$. Aplicar la regla de la cadena para la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{x\,y} \cos x\, y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

11.- La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcular la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$.

12.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(2x+y)), \qquad g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x,y)$ y $Dg(u,v,w)$. Calcular la función compuesta $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$. Calcular la matriz de $Dh(1,-1,1)$.

13.- Considérese la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(b) Hallar las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

(c) Sea $g(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar la función compuesta $f \circ g$ y la derivada $(f \circ g)'(0)$. ¿Se puede calcular esta derivada utilizando la regla de la cadena?

14.- Consideremos el lugar geométrico de los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$. ¿Existe un plano tangente en el origen? ¿Por qué?

15.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva determinada por la intersección de las dos superficies $x^2 + y^2 + 2\,z^2 = 4$, y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1,1,1)$.

16.- Considérese la función

$$f(x,y) = (x^2 + y^4)^2 \operatorname{máx}\{|3x+y|, |x-y|\}\,.$$

(a) Calcular las derivadas parciales y estudiar si f es diferenciable en $(0,0)$.

(b) Demostrar que f es diferenciable en el punto $(3,-2)$ y calcular su diferencial en ese punto.

(c) ¿Existen las derivadas parciales de $f(x,y)$ en el punto $(-1,1)$?