Hoja 3

1.- Sea
$$f(x,y) = x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \qquad (x,y)\neq(0,0), \qquad\qquad f(0,0)=0.$$
Comprobar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

2.- El cambio de variable $x = u+v$, $y = u\,v^2$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Calcular el valor de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en el que $u=1$, $v=1$, sabiendo que
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$
en dicho punto.

3.- Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $(0,0)$ de las siguientes funciones:
$$(a) \quad f(x,y) = x\,e^{x+y}. \qquad\qquad (b) \quad f(x,y) = \operatorname{sen} x\,y + \cos x\,y.$$

4.- Hallar los posibles puntos de máximo, mínimo y de silla de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$. $\qquad$ (b) $f(x,y) = x\,y\,e^{x-y}$.

(c) $f(x,y) = \log(2+\operatorname{sen} x\,y)$. $\qquad$ (d) $f(x,y) = x\log(x^2+y^2)$.

5.- Hallar los puntos críticos y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos silla:

(a) $f(x,y) = x^2+y^2-2\,x\,y$. $\qquad$ (b) $f(x,y) = x^2+y^2+x\,y-2\,x-4\,y+10$.

(c) $f(x,y) = x\,y$. $\qquad$ (d) $f(x,y) = 3\,x^2-4\,y^2+x\,y$.

6.- Escribir un número dado $a>0$ como producto de cuatro factores positivos, cuya suma sea mínima.

7.- Calcular la distancia mínima entre los puntos de la gráfica de $f(x,y) = \dfrac{1}{4\,x\,y}$ y el punto $(0,0,0)$.

8.- Queremos construir una caja de carton con volumen fijo V_0. Hallar las dimensiones que minimizan la cantidad de cartón utilizada. ¿Que tipo de caja obtenemos?

9.- Hallar las dimensiones de una caja de cartón que tenga superficie fija S_0 y que tenga volumen máximo.

10.- Se dispone de 12 decímetros cuadrados de metal para fabricar una lata cilíndrica con las dos tapas. ¿Qué dimensiones maximizan el volumen de dicha lata?

11.- Considérense el polinomio $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$ y la función $g(t) = f(t,c\,t)$ de $t\in\mathbb{R}$. Demostrar que $(0,0)$ es un punto crítico degenerado para f y que aunque g tiene un mínimo en $t=0$, el punto $(0,0)$ no es un mínimo local de f.

12.- Hallar los extremos de las siguientes funciones con las correspondientes restricciones:
$$(a)\ f(x,y) = x^2+y^2,\ 2\,x^2+y^2\leq 4. \qquad (b)\ f(x,y) = 4\,x^2+y^2-2\,x-y+3,\ 4\,x^2+y^2\leq 1.$$