Hoja 5

1.- Hallar el valor de las siguientes integrales sobre los rectángulos indicados. Justificar, en cada caso, la existencia de la integral.

$$(a) \int\int_Q x^2\, e^y\, dx\, dy,\ Q = [-1,1] \times [0, \log 2]. \qquad (b) \int\int_Q y^{-3}\, e^{x/y}\, dx\, dy,\ Q = [0,t] \times [1,4].$$

2.- Para cada una de las siguientes funciones $f(x,y)$ definidas sobre el rectángulo $Q = [0,1] \times [0,1]$, se pide representar el conjunto de los valores de $f(x,y)$ sobre Q y calcular el volumen del sólido así definido. Determinar también el conjunto

$$\mathcal{D} = \big\{(x,y) \in Q : f \text{ no es continua en } (x,y)\big\}$$

y explicar la existencia de las integrales utilizadas.

$$(a)\ f(x,y) = \begin{cases} 1-(x+y) & \text{si} \quad x+y \le 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad (b)\ f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad x^2 \le y \le 2\,x^2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$(c)\ f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si} \quad x^2+y^2 \le 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad (d)\ f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad 0 \le y \le \operatorname{sen}(\pi\, x), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3.- Dibujar la región de integración, estudiar la existencia de la integral y calcular su valor en cada uno de los casos siguientes.

(a) $\displaystyle\int\int_\Omega x\, \cos(x-y)\, dx\, dy$, siendo Ω el triángulo de vértices $(0,0), (\pi,0), (\pi,\pi)$.

(b) $\displaystyle\int\int_\Omega e^{x+y}\, dx\, dy$, siendo $\Omega = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 1\big\}$.

(c) $\displaystyle\int\int_\Omega x^2\, y^2\, dx\, dy$, siendo Ω la región acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas $x\,y = 1$, $x\,y = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4\,x$.

4.- Una pirámide está limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2\,y+3\,z = 6$. Dibujar esta pirámide y calcular su volumen.

5.- Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano $z = 0$ y los planos $x = 1$ y $x = 3$. Dibujar este sólido y calcular su volumen.

6.- En los siguientes apartados, se supone que f es una función integrable en sobre cada una de las regiones Ω. En cada caso, se pide determinar la región Ω e invertir el orden de integración:

$$(a) \int_0^2 \Big(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx\Big)\, dy. \qquad (b) \int_1^4 \Big(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\, dy\Big)\, dx.$$

$$(c) \int_1^e \Big(\int_0^{\log x} f(x,y)\, dy\Big)\, dx. \qquad (d) \int_0^\pi \Big(\int_{-\operatorname{sen} x/2}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\, dy\Big)\, dx.$$

7.- Hallar el valor de la integral

$$\int\int_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}\, dx\, dy,$$

donde Ω es el triángulo determinado por la recta $x + y = 2$ y los dos ejes coordenados. Utilícese un cambio lineal de variables.

8.- En cada uno de los siguientes casos, dibujar la región Ω y expresar la integral $\displaystyle\int\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$ como una integral iterada en coordenadas polares.

(a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}, a > 0.$

(b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}.$

(c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}.$

(d) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$

9.- Consideramos la aplicación definida por $\begin{cases} x = u + v, \\ y = v - u^2. \end{cases}$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0,0), (2,0), (0,2)$.

(c) Calcular $\displaystyle\int\int_{\Omega} \frac{1}{(x-y+1)^2}\,dx\,dy.$

10.- Se considera la aplicación definida por $\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2\,u\,v. \end{cases}$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u,v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del rectángulo R de vértices $(1,1), (2,1), (2,3), (1,3)$.

(c) Calcular el área de Ω