HOJA DE EJERCICIOS 5
Análisis Matemático.
CURSO 2020–2021.

Problema 1. Consideramos la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la siguiente fórmula:

$$f(x,y) \equiv \begin{pmatrix} x + e^x \\ y^2 + \operatorname{sen}(x-1) \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestra que existe una inversa local $g \equiv (g_1, g_2)$ de f tal que el dominio de g es un abierto $V \ni (1+e, 1)$ y $g(1+e,1) = (1,1)$.

(b) Demuestra que en el abierto V se verifica la siguiente identidad:

$$Dg \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+e^{g_1}} & 0 \\ \dfrac{-\cos(g_1 - 1)}{2g_2 \cdot (1+e^{g_1})} & \dfrac{1}{2g_2} \end{bmatrix}.$$

(c) Derivando esa identidad, obtén identidades:

$$\begin{aligned} g_{2uu} &\equiv \text{fórmula}_1\,(g_1, g_2)\,, \\ g_{2uv} &\equiv \text{fórmula}_2\,(g_1, g_2)\,, \\ g_{2vu} &\equiv \text{fórmula}_3\,(g_1, g_2)\,, \\ g_{2vv} &\equiv \text{fórmula}_4\,(g_1, g_2)\,, \end{aligned}$$

entre las derivadas segundas de g_2 y expresiones concretas en g_1 y g_2. Comprueba que las expresiones segunda y tercera son idénticas, aunque se llega a ellas por caminos diferentes.

(d) Calcula explícitamente la matriz hessiana de g_2 en el punto $(1+e, 1)$.

(e) Repite el proceso con g_1.

Problema 2. **(a)** Prueba que la ecuación

$$x\,y = \log \frac{x}{y}$$

admite una única solución $y = f(x)$ definida en un entorno de $a = \sqrt{e}$ y verificando $f(\sqrt{e}) = 1/\sqrt{e}$.
(b) Calcula explícitamente los números $f'(a)$ y $f''(a)$.

Problema 3. Sea

$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - 4\,y^2 \\ v(x,y) = 4\,x\,y \end{cases}$$

a) Demostrar que la aplicación $(x,y) \mapsto (u,v)$ es localmente invertible en todo punto distinto del origen.

b) Calcular la matriz de la diferencial de la función inversa de $f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$ en $x = 1/2\,,\ y = 1$.

c) Probar que en ningún disco abierto conteniendo al origen existe una inversa de f, ni siquiera no diferenciable.
Indicación: Estudiar la inyectividad.

Problema 5. Estudia si se puede despejar (x, y, z) en términos de (u, v, w) cerca del origen en el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u = 2\,x + 2\,x^2\,y + 2\,x^2\,z + 2\,x\,y^2 + 2\,x\,y\,z \\ v = x + y + 2\,x\,y + 2\,x^2 \\ w = 4\,x + y + z + 3\,y^2 + 3\,z^2 + 6\,y\,z \end{cases}$$

Problema 6. a) Dada $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, definimos $F_\varepsilon(x, y) = \big(-y + \varepsilon f(x), x + \varepsilon f(y)\big)$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Demostrar que para ε suficientemente reducido, existe un $\delta > 0$ tal que en el disco $B_\delta(x_0, y_0)$ la función F_ε es invertible alrededor de (x_0, y_0) con inversa C^1.
b) Sean $F, G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tales que para constantes positivas c, λ se verifica:

$$||F(x) - F(y)|| \geq c||x - y||,$$

$$||G(x) - G(y)|| \leq \lambda||x - y||.$$

(observar que no se pide que F ni G sean diferenciables.)
Definimos $H(x) = F(x) + \varepsilon G(x)$. Demostrar que para algún ε, H es inyectiva, y por tanto globalmente invertible.
c) Utilizar el resultado demostrado en el apartado b) para probar que en el apartado a) podemos tomar $\delta = \varepsilon$.

Problema 7. Demuestra que existe una única función $f : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno U de $(0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$ y tal que

$$e^{f(x,y)} = \left(1 + x\,e^{f(x,y)}\right)\left(1 + y\,e^{f(x,y)}\right) \qquad \text{en todos los } (x, y) \in U\,.$$

Problema 8. Estudia si es posible despejar $u(x, y, z)$ y $v(x, y, z)$ en las ecuaciones

$$\begin{cases} x\,y^2 + x\,z\,u + y\,v^2 = 3 \\ x\,y\,u^3 + 2\,x\,v - u^2\,v^2 = 2 \end{cases}$$

en un entorno de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $(u, v) = (1, 1)$. En caso afirmativo, calcula $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial z$ en el punto $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Problema 9.

Decimos que una aplicación f es **cerrada** si la imagen directa por f de cualquier cerrado es un cerrado.
Decimos que una aplicación f es **coerciva** si existe una constante $K > 0$ tal que
$||f(x) - f(y)|| \geq K\,||x - y||$ para cualesquiera x, y.

a) Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es coerciva y continua entonces es cerrada.
Indicación: prueba que si una sucesión de imágenes $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente, la original $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.
b) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ abierta y cerrada. Demuestra que es suprayectiva.
c) Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es abierta pero no cerrada.
d) Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es cerrada. ¿Es f abierta?
Indicación para ver que es cerrada: Si una sucesión de imágenes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, la original $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada.

Problema 10. Dibuja los abiertos

$U_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4,\ y > \frac{1}{[illegible]}|x| \right\}$ $\quad U_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + y^2 < 4,\ y < \frac{1}{[illegible]}|x| \right\}$