Hoja 6

1.- Hallar el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración.

(a) $\displaystyle\int_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$ con $Q=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

(b) $\displaystyle\int_T x^2\cos z\,dx\,dy\,dz$ siendo T la región limitada por los planos $z=0, z=\pi, y=0, y=1, x=0, x+y=1$.

(c) $\displaystyle\int_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$ siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z=x\,y$ y los planos $y=x, x=1$ y $z=0$.

(d) $\displaystyle\int_\Omega x\,y\,\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz$ siendo Ω el sólido limitado por la superficie $y=x^2$ y los planos $y=z, y=1$ y $z=0$.

2.- En cada uno de los siguientes casos, la integral $\displaystyle\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ de la función positiva f se reduce a la integral iterada dada. Dibujar la región de integración $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z=0$. Escribir entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(a) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^x\Big(\int_0^y f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx.$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1\Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\Big(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big)dx.$

3.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales. Dibujar el recinto de integración en cada caso.

(a) $\displaystyle\int_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+9)^2}\,dx\,dy\,dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\displaystyle\int_C x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$ con $C=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y,z\ge 0\big\}$.

(c) $\displaystyle\int_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.

4.- Utilizar coordenadas esféricas para calcular $\displaystyle\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, donde $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ es el recinto acotado con frontera $\partial\Omega=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=z\big\}$.

5.- Determinar y dibujar el recinto de integración y hallar el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas.

(a) $\displaystyle\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2=2\,z$ y el plano $z=2$.

(b) $\displaystyle\int_\Omega dx\,dy\,dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z=x^2+y^2$ y $x+y=1$.

(c) $\displaystyle\int_\Omega (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ siendo Ω un cono recto de revolución, de altura h, base de radio $a>0$ situado en el plano $z=0$ y eje en el eje Z.

(d) $\displaystyle\int_\Omega ((x+y)^2-z)\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el cono limitado por $(z-1)^2=x^2+y^2$ y el plano $z=0$.

6.- Hallar el volumen del sólido de revolución $z^2\ge x^2+y^2$ encerrado por la superficie $x^2+y^2+z^2=1$.

7.- Calcular el volumen de los siguientes sólidos.

(a) El limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2+y^2=4\,z$.

(b) El limitado por el plano $z=0$, el cilindro $x^2+y^2=2x$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(c) El cuerpo acotado $K\subset\mathbb{R}^3$ cuya frontera viene dada por $\sqrt{\dfrac{x}{2}}+\sqrt{\dfrac{y}{3}}+\sqrt{\dfrac{z}{15}}=1$.

8.- El los siguientes casos, dibujar el camino σ y hallar la integral $\displaystyle\int_\sigma f\,ds$.

(a) $f(x,y,z)=x+y+z$ y $\sigma(t)=(\text{sen }t,\cos t,t)$, $0\le t\le\pi$.

(b) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y}{y+z}$ y $\sigma(t)=\Big(t,\dfrac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}},t\Big)$, $1\le t\le 2$.

(c) $f:\mathbb{R}^3\setminus\{y=0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida mediante $f(x,y,z)=\dfrac{1}{y^3}$ y $\sigma(t)=(\log t,t,2)$, $1\le t\le e$.

9.- Dibujar las siguientes curvas, y hallar su longitud de arco.

(a) El arco de cicloide descrito por

$$\begin{cases} x=R\,(t-\sin t),\\ y=R\,(1-\cos t),\end{cases}$$

con $0\le t\le 2\pi$.

(b) La cardioide que en coordenadas polares viene dada por $r=1+\cos\theta$, con $0\le\theta\le\pi$.