ÁLGEBRA I. HOJAS 5-6.

1. Ejercicios de p- 192 a p.195 del libro Hernández-Vázquez-Zurro.

2. Ejercicios de p- 202 a p.205 del libro Hernández-Vázquez-Zurro.

3. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que una transformación lineal $g : W \to V$ es una inversa a derecha de f si $f \cdot g = id_W$.

Demuestra que son equivalentes:

1. f es sobreyectiva.
2. Existe una inversa a derecha de f.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que verifica $f(1,0,0) = (1,1)$, $f(0,1,0) = (1,-1)$, $f(0,0,1) = (1,-1)$.

1. Demuestra que f es sobreyectiva.
2. Exhibe dos inversas a derecha distintas (dos transformaciones lineales diferentes $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$, tales que $f \cdot g_i = id_{\mathbb{R}^2}$).

5. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que una transformación lineal $h : W \to V$ es una inversa a izquierda de f si $h \cdot f = id_V$.

Demuestra que son equivalentes:

1. f es inyectiva.
2. f admite una inversa a izquierda.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que verifica $f(1,0) = (1,1,1)$, $f(0,1) = (1,-1,1)$.

1. Demuestra que f es inyectiva.
2. Exhibe dos transformaciones lineales diferentes $h_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $i = 1,2$, tales que $h_i \cdot f = id_{\mathbb{R}^2}$.

7. Sean V y W dos espacios vectoriales de igual dimensión, y sea $f : V \to W$ una transformación lineal que es un isomorfismo. Demuestra que f admite una única inversa a derecha g, una única inversa a izquierda h, y que $g = h (= f^{-1})$.

8. Sea $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos junto con el polinomio nulo. Demuestra que las condiciones del problema anterior se verifican para la transformación lineal $f : \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ que se caracteriza por las condiciones $f(1) = X^2 + 1$, $f(X) = X + 1$, $f(X^2) = 1$, y halla la matriz de f^{-1} en la base $\{1, X, X^2\}$ de $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$.