Ejercicios (Integral de Riemann)

7.1. Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

(1) $\dfrac{(1+\sqrt{x})^3}{x^{1/3}}$, (2) $\dfrac{(\operatorname{arc\,sen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$, (3) $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$,

(4) $4\cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen} x$, (5) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}$, (6) $\dfrac{1}{a^2e^x + b^2e^{-x}}$,

(7) $x^5\sqrt{1-x^3}$, (8) $\dfrac{1}{x(x^7+1)}$, (9) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$,

(10) $\arctan x$, (11) $\cos x \log(1+\cos x)$, (12) $\log^2 x$,

(13) $\dfrac{\cos 2x}{e^x}$, (14) $\dfrac{x \operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ (15) $x\tan^2 x$,

(16) $\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$, (17) $\dfrac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}$,

(18) $\dfrac{1}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$, (19) $\dfrac{3x+5}{(x^2-2x+2)^2}$,

(20) $\dfrac{x}{x^4+(a+b)x^2+ab}$, (21) $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$, (22) $\dfrac{1}{x^4+1}$,

(23) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, (24) $\dfrac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}$, (25) $\dfrac{(1+\sqrt{x})^2}{2+\sqrt{x}}$,

(26) $\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$, (27) $\dfrac{1}{x\sqrt{2x+1}}$, (28) $\dfrac{1}{x(\sqrt{1+x}-2)}$,

(29) $\dfrac{3x^{2/3}-7}{x-7x^{1/3}+6}$, (30) $\dfrac{3}{x+3(x+4)^{2/3}}$, (31) $\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}$,

(32) $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}$, (33) $\dfrac{1}{x+1}\sqrt{\dfrac{3+x}{x-1}}$, (34) $\sec^3 x$,

(35) $\dfrac{1}{(a+b\cos x)\operatorname{sen} x}$, (36) $\dfrac{1}{2+3\tan x}$, (37) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$,

(38) $\dfrac{x^2-3x+7}{\sqrt{2x^2+4x+5}}$, (39) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x^2-x+1}}$.

7.2. Calcular los límites siguientes mediante integrales definidas:

a) $\displaystyle \lim_n \frac{1}{n}\Big(\cos\frac{x}{n} + \cos\frac{2x}{n} + \cdots + \cos\frac{nx}{n}\Big)$,

b) $\displaystyle \lim_n \Big(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\Big)$,

c) $\lim\limits_{n}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^4+2^4}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n^4}}\Big)$,

d) $\lim\limits_{n}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}, \qquad k\geqslant 0.$

7.3. Sea f continua en $[0,a]$. Comprobar que

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$$

y calcular, para $n=1$ y $n=3$, $\int_0^\pi \frac{x\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}$.

7.4. Calcular las integrales definidas siguientes:

a) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx$, b) $\displaystyle\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}x}{3+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1+x)}{(1+x)^2}\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx.$

7.5. Probar que las siguientes funciones son derivables y hallar sus derivadas:

a) $F(x)=\displaystyle\int_a^{x^3}\operatorname{sen}^3 t\,dt$,

b) $F(x)=\displaystyle\int_a^b f(x+t)\,dt$, con f continua,

c) $F(x)=\displaystyle\int_0^x xf(t)\,dt$, con f continua,

d) $F(x)=\displaystyle\int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\,dt$, con h continua y f y g derivables.

7.6. Demostrar que, si f es continua,

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\int_0^u f(t)\,dt\,du.$$

7.7. Hallar el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{x^2}^{x}\frac{e^t-1}{\operatorname{sen}t^2}\,dt}{\log x}.$$

7.8. Demostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx,$$

para cada $n \geqslant 2$. Probar que para cada $n \geqslant 1$ se tiene:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$,

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$.

7.9. Hallar el área de la figura limitada por la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$, su tangente en el punto $(2, -5)$ y el eje y.

7.10. Calcular el área de la figura limitada por la curva $y^2 = x(x-1)^2$.

7.11. La corona circular centrada en el origen y de radio interior $\sqrt{2}$ y radio exterior $\sqrt{6}$ se corta con la parábola de ecuación $x = y^2$. Hallar el área de una de las dos superficies que se forman.

7.12. Hallar el valor del parámetro λ para el que la curva $y = \lambda\cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por el eje x, la curva $y = \operatorname{sen} x$ y la recta $x = \pi/2$.

7.13. Hallar la longitud del arco que la recta $x = 4/3$ corta en la curva $y^2 = x^3$.

7.14. Calcular la longitud del arco de la curva $y = \log\cos x$ entre los puntos de abscisas $x = 0$, $x = \pi/4$.

7.15. Calcular la longitud del arco de la curva $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\log y$ entre los puntos $y = 1$ e $y = 2$.

7.16. Hallar la longitud de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, donde $a > 0$.

7.17. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la curva $a^2y^2 = ax^3 - x^4$ alrededor del eje x ($a > 0$).

7.18. Calcular el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje x la figura limitada por $y = a\cosh\frac{x}{a}$ y las rectas $x = c$, $x = -c$ ($a, c > 0$).

7.19. La figura limitada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ ($0 \leqslant x \leqslant \pi/2$), el eje de ordenadas y la recta $y = 1$ gira alrededor del eje y. Calcular el volumen del sólido de revolución así engendrado.

7.20. Hallar el área del elipsoide formado al girar alrededor del eje x la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

7.21. Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje y la porción de la curva $y = x^2/2$ cortada por la recta $y = 3/2$.

7.22. Hallar el área de la superficie generada al girar alrededor del eje x la porción de la curva $y^2 = 4 + x$ cortada por la recta $x = 2$.

7.23. Determinar el carácter de las siguientes integrales impropias:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$, c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{|x-1|}$,

d) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\log x}$, f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x}\,dx$,

g) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+3}}$, h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x^3-4x^2+4x)^{1/3}}$, i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$,

j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, k) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+1}$, l) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^5)^{1/6}}$,

m) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$, n) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x^2-1)^2}$, ñ) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$,

o) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x(3-x))^{1/3}}$, p) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2e^-x}{1+x^2}\,dx$, q) $\displaystyle\int_2^\infty e^{-x^3}\,dx$,

r) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$, s) $\displaystyle\int_0^1 \log x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx$, t) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{\log x}$.

7.24. Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_{-1}^\infty \frac{dx}{\sqrt{|x(1-x^2)|}}.$$

7.25. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales y, si convergen, calcular su valor:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$, b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^1 x|\log x|\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{2+\cos x}$, f) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$,

g) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, h) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$, i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{1+e^x}$,

j) $\displaystyle\int_0^{\infty} |x-3|e^{-x}\,dx$, k) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{|x-2|}\,dx$, l) $\displaystyle\int_1^{3} |x-2|\log x\,dx$,

m) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

7.26 (Funciones gamma y beta de Euler)**.**

a) Probar que, dados $x, y \in (0,\infty)$, las siguientes integrales son convergentes:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$
$$B(x,y) = \int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

b) Probar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para todo $x > 0$.

c) Probar que $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

7.27. Teniendo en cuenta la función Γ y sabiendo que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^{\infty} 3^{-4x^2}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-|x-1|}\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^{1} x^2\log^4 x\,dx$, f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^3e^{-x^2}\,dx$,

g) $\displaystyle\int_0^{\infty} (x-3)e^{-x^2}\,dx$, h) $\displaystyle\int_0^{\infty} (x^2+1)e^{-\sqrt{x}}\,dx$.