

# Conjuntos y Números

LISTA 1

CURSO 2019-20

- 1) Halla una expresión para la suma de los primeros números naturales positivos:  $1 + 2 + \dots + n$ . Y otra para la suma de los  $n$  primeros términos de la progresión aritmética:  $a + kd$ ,  $k = 0, 1, \dots$
- 2) Halla la suma de las  $n$  primeras potencias de  $r$ :  $r^0 + r^1 + \dots + r^{n-1}$ . Halla una fórmula general para la suma de las  $n$  primeros términos de una progresión geométrica  $cr^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$
- 3) Encuentra una fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de  $n$  lados.  
*Indicación: recuerda que los ángulos de un triángulo suman  $\pi$  radianes.*
- 4) Decir cuáles de las siguientes condiciones son *necesarias*, cuáles son *suficientes* y cuáles *son necesarias y suficientes* para que un número natural  $n$  sea divisible por 6.
  - a)  $n$  es divisible por 3;
  - b)  $n$  es divisible por 12;
  - c)  $n = 24$ ;
  - d)  $n^2$  es divisible por 6;
  - e)  $n$  es par y divisible por 3;
  - f)  $n$  es par o divisible por 3.
- 5) Escribir el enunciado de la afirmación recíproca y de la contraposición de la siguiente afirmación: *Si estudio mucho y el examen resulta fácil, obtendré buena nota.*
- 6) Explica por qué son equivalentes las proposiciones:  $S \vee (\neg R) \Rightarrow T$ ,  $(\neg T) \Rightarrow (\neg S) \wedge R$ , y confírmalo con la tabla de verdad de cada una de ellas.
- 7) En las siguientes proposiciones,  $x$ ,  $y$  son números reales. Traduce cada una de ellas a frases que no contengan ningún símbolo, sólo palabras. Explica cuáles son ciertas y escribe la negación de las que no lo sean.
  - a)  $\forall x ((x > 0) \Rightarrow \exists y ((y > 0) \wedge (y^2 = x)))$
  - b)  $\exists x \forall y ((y > x) \Rightarrow (y > 5))$
  - c)  $\exists x (1 < x^2 < x)$
  - d)  $\forall y \exists x ((x \in \mathbb{R}) \wedge (x^3 = y + 1))$
- 8) Traduce cada una de las siguientes afirmaciones a símbolos y cuantificadores. Las respuestas no deben contener palabras.
  - a) El número 5 tiene una raíz cuadrada positiva.
  - b) Todo número real positivo tiene dos raíces cuartas reales y distintas.
- 9) Razona con palabras por qué los siguientes pares de afirmaciones no son equivalentes en los números naturales, y explica cuáles de ellas son ciertas.
  - a)  $\forall x \exists y (x = 2y \vee x = 2y + 1)$  y  $\exists x \forall y (x = 2y \vee x = 2y + 1)$ .
  - b)  $\exists x \forall y, x < y < x + 2$  y  $\forall x \exists y, x < y < x + 2$ .
- 10) ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones en los números naturales? Escribir su negación.
  - a)  $\forall x \exists y, y < x$
  - b)  $\exists x \forall y, \forall z, x < z < y$
- 11) a) Demuestra por reducción al absurdo que  $\log_3(1215)$  es irracional.  
b) Demostrar por reducción al absurdo que los números

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad \sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

son irracionales. (Sugerencia: si  $x$  es racional, también lo es su cuadrado.)

- 12) Se llama *cuadrado perfecto* a un número de la forma  $a^2$  donde  $a$  es un número natural. Demuestra que si un número natural  $n > 0$  es un cuadrado perfecto, entonces  $n + 1$  no puede ser un cuadrado perfecto.
- 13) Demostrar por inducción:
- a)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .
- b)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .
- c)  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .
- 14) a) Demostrar que si  $n \in \mathbb{N}, n > 2$ , entonces  $2^n > 1 + 2n$ .
- b) Demostrar que si  $n \in \mathbb{N}, n > 4$ , entonces  $2^n > n^2 + 1$ .
- c) Demostrar que si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces el número  $a_n = 4^n + 6n - 1$  es divisible por 9.
- 15) Sean  $a_1 = 1, a_2 = a_3 = 7$  y  $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ . Utilizando inducción, demostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple la fórmula
- $$a_n = 1 + 2^n + 2(-1)^n.$$
- 16) Probar por inducción que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.
- 17) Demostrar que  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .
- 18) Demostrar, para todo  $q \neq 1$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la igualdad
- $$(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \dots (1+q^{2^n}) = \frac{q^{2^{n+1}} - 1}{q - 1}.$$
- 19) Supongamos que  $A \subset B \subset C$ . Determinar  $A \setminus B, A \setminus C$  y  $A \cup B$ .
- 20) Para cada número natural  $n$ , sea  $A_n = [-\frac{2}{n+1}, \frac{4n-1}{3n}]$ . Determinar  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  y  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .
- 21) Probar las siguientes igualdades para conjuntos arbitrarios  $S, T, U$  y  $V$ .  
(Indicación: los diagramas de Venn pueden ser útiles para orientarse, pero la demostración no debe depender de ellos).
- a)  $(S \setminus T) \cup (T \setminus S) = (S \cup T) \setminus (S \cap T)$       d)  $(S \setminus T) \times (U \setminus V) = (S \times U) \setminus [(S \times V) \cup (T \times U)]$
- b)  $(S \setminus (T \cup U)) = (S \setminus T) \cap (S \setminus U)$       e)  $(S \cup T) \times V = (S \times V) \cup (T \times V)$
- c)  $(S \setminus (T \cap U)) = (S \setminus T) \cup (S \setminus U)$
- 22) Dar una descripción explícita del conjunto  $\mathcal{P}(S)$  de partes de  $S = \{a, b, 1, 2\}$ . Demostrar que  $S \subset T$  si y sólo si  $\mathcal{P}(S) \subset \mathcal{P}(T)$ . Concluir que  $S = T$  si y sólo si  $\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(T)$ .
- 23) Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
- $$\{e\} \subset \{e, \{e^2\}\}, \quad \emptyset \subset \{e, \{\emptyset\}\}.$$
- 24) Probar, o demostrar que son falsas, las siguientes afirmaciones:
- a)  $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ ;    b)  $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ ;    c)  $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ .
- 25) Sean  $A, B, C$  conjuntos dados tales que  $B \subset A$ . Describir en cada caso los conjuntos  $X$  que satisfacen las ecuaciones:

i)  $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$ , si sabemos que  $A \subset C$ .

ii)  $\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C \end{cases}$ , si sabemos que  $A \cap C = \emptyset$ .