Conjuntos y Números

Lista 3 | Curso 2019-20

1) En cada uno de los siguientes casos, se da una relación entre elementos del conjunto que se especifica debajo. Decidir cuáles son **relaciones de orden**; en caso de serlo, estudiar si es o no un **orden total**; de lo contrario, explicar qué propiedad le falla para ser un orden.

$$\boxed{\begin{array}{c} x \geq y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}\ ,\ \boxed{\begin{array}{c} x < y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}\ ,\ \boxed{\begin{array}{c} |x| \leq |y| \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}}\ ,\ \boxed{\begin{array}{c} A \subset B \\ A, B \in \mathcal{P}(X) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a \leq c \ \wedge \ b \leq d \\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \end{array}}\ ,\ \boxed{\begin{array}{c} a + b\sqrt{2} \leq c + d\sqrt{2} \\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \end{array}}$$

Ojo: por convenio, ' $\subset$ *' incluye el caso '* $=$ *'. Se escribe con frecuencia '* $\subseteq$ *', para ayudar a recordarlo.*

2) Sea X un conjunto no vacío y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se define en X la siguiente relación:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Demostrar que la relación $\mathcal{R}$ es una relación de orden si y sólo si f es inyectiva.

3) Para la relación de orden dada en $\mathbb{N}$ por $\boxed{n|m}$, dar respuesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Tiene $\mathbb{N}$ un máximo y/o un mínimo para esta relación?

b) ¿Qué subconjuntos de $\mathbb{N}$ tienen un máximo y cuáles un mínimo?

c) Dado un intervalo $A = \{k \in \mathbb{N} : n \leq k \leq m\}$, ¿qué debe cumplir un $k \in A$ para ser un elemento maximal de A? ¿Y para ser minimal?

d) ¿Cuáles son los minimales de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$?

e) Calcular los elementos minimales de $I = \{k \in \mathbb{N} : 1 < k \leq 100\}$.

4) Decimos que una relación de orden $\mathcal{R}$ en un conjunto X es un **buen orden**, si cada subconjunto no vacío $A \subset X$ tiene un mínimo, como sucede con el orden ' $\leq$ ' en $\mathbb{N}$.

Probar que también están **bien ordenados** por ' $\leq$ ' los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

a) La unión $X \cup Y$ de dos subconjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}$, si cada uno de ellos está bien ordenado.

b) El conjunto $X = \{a_n + b_m : n, m \in \mathbb{N}\}$, si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, son dos sucesiones crecientes.

5) Probar la afirmación siguiente o dar un contraejemplo que la refute: *Si un conjunto ordenado A tiene un solo elemento minimal a, entonces a es el mínimo de A.*

6) Dar una biyección entre los conjuntos siguientes que transforme una en otra las relaciones de orden dadas sobre ellos:

a) Por un lado $\mathbb{Z}$, con el orden ' $\leq$ ' habitual y por otro el conjunto de los racionales de la forma $1 \pm n/(n+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, también con el orden ' $\leq$ ' habitual.

b) Por un lado $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, con el orden dado por: $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si y sólo si $|a-c| \leq d-b$ y por otro el conjunto de los discos abiertos del plano, con su centro en el eje x, ordenados por inclusión.

7) ¿Existe una biyección entre $\mathbb{Z}$ con el orden '$\leq$ ' habitual y $\mathbb{Q}$ con el orden ' $\leq$ ' habitual que transforme una en otra las relaciones de orden?

8) Dado un alfabeto que, como el nuestro, tiene un orden total establecido, y llamando "palabras" a todas las posibles secuencias finitas de sus signos, se llama *orden lexicográfico* al usado en los diccionarios, listas de nombres, etc., para ordenar el conjunto de palabras.

a) Usando el signo ' $\leq$ ' para el orden de las "letras", dar una definición de cuándo la palabra '$a_1 a_2 \dots a_n$' precede a la '$b_1 b_2 \dots b_m$' : decir qué deben cumplir sus letras para ello.

b) Con esa definición, probar que este orden es total; en consecuencia, cada conjunto finito de palabras tendrá un mínimo.

c) (*) ¿ es cierto el apartado anterior para cualquier conjunto infinito de palabras? (y por lo tanto se trataría de un *buen orden*). Demostrarlo o dar un contraejemplo.

9) En $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos la siguiente relación: $x\mathcal{R}y$ si x e y tienen el mismo signo y $|x| \leq |y|$.

a) Demostrar que es una relación de orden, pero que no es de orden total.

b) Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo $[-3, 2)$.

10) Se define $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y se considera la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n,m) &\longrightarrow f(n,m) = 2^n 3^m \end{aligned}$$

y a partir de ella se definen las siguientes relaciones en $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$(n,m)\mathcal{R}_1(n',m') \Leftrightarrow f(n,m) \leq f(n',m')$$
$$(n,m)\mathcal{R}_2(n',m') \Leftrightarrow f(n,m) \mid f(n',m')$$

a) Demostrar que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son ambas relaciones de orden. ¿Son relaciones de orden total?

b) Hallar los elementos distinguidos (elementos maximales, elementos minimales, supremos, ínfimos, máximos y mínimos) del conjunto $A = \{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : 1 \leq n+m \leq 4\}$ para cada una de la relaciones de orden $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$.