

# Matemática Discreta

Lista 1

2º Matemáticas, curso 2020-21

---

## APLICACIÓN DE LAS REGLAS BÁSICAS DE RECuento

- En una quiniela hay 14 partidos con tres resultados posibles cada uno: 1, X, 2.
  - ¿Cuántas quinielas debes rellenar para estar seguro de acertar los resultados de los 14 partidos?
  - Un adivino asegura que en la siguiente jornada no van a salir signos consecutivos iguales. Si el adivino está en lo cierto, ¿cuántas quinielas debes rellenar para asegurar el acierto?
- Calcula el número de funciones inyectivas de un conjunto de 7 elementos en un conjunto de 10 elementos.
  - Calcula el número de maneras de distribuir 5 bolas distintas en 8 cajas distintas si en cada caja puede haber como mucho una bola.
- Vamos a fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz  $3 \times 3$ . En las filas pueden repetirse los símbolos, pero los tres de cada columna han de ser distintos. ¿Cuántos símbolos son necesarios (como mínimo) si queremos que haya al menos  $10^9$  tarjetas distintas? (*Indicación:* hágase la cuenta por columnas).
- ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 8 y un 9 en su expresión decimal?
  - ¿Cuántos números naturales tienen en su expresión en base 10 todos sus dígitos distintos?
- Calcula el número de permutaciones de la palabra ABCDEFG que contengan:
  - La secuencia ABC; b) Las secuencias AB, CD y EF; c) Las secuencias AB, BC y EF.
- ¿De cuántas maneras podemos ordenar las 27 letras del alfabeto de forma que A y B no aparezcan consecutivamente? ¿Y si además A y C no pueden aparecer consecutivamente?
- ¿Cuántos números naturales menores que 60 000 son primos con 30?
- Halla los cardinales de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}X &= \{(A, B) : A, B \subseteq \{1, \dots, n\}, A \cap B = \emptyset\}, \\Y &= \{(A, B) : A, B \subseteq \{1, \dots, n\}, A \subseteq B\} \\Z &= \{(A, B) : A, B \subset \{1, \dots, n\}, A \subsetneq B\}.\end{aligned}$$

(*Indicación:* clasifica los números entre 1 y  $n$  en función de su pertenencia a  $A$ , a  $B$ , o a ninguno de ellos.)

- Consideramos una colección  $A_1, \dots, A_k$ , con  $k \geq 2$ , de subconjuntos de un conjunto  $X$ . Prueba, por inducción, las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad & \sum_{j=1}^k |A_j| - (k-1)|X| \leq \left| \bigcap_{j=1}^k A_j \right| \leq \min_{j=1, \dots, k} |A_j| \\ \text{(b)} \quad & \sum_{j=1}^k |A_j| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| \leq \left| \bigcup_{j=1}^k A_j \right| \leq \sum_{j=1}^k |A_j|.\end{aligned}$$

(Observa que hay cuatro enunciados que comprobar).

- He aquí un acertijo (algo truculento) debido a Lewis Carroll. En una batalla entre 100 combatientes, 80 perdieron un brazo, 85 una pierna, 70 un ojo y 75 una oreja. Un número  $x$  de ellos perdió las cuatro cosas.

- Demuestra que  $10 \leq x \leq 70$ .
- ¿Se pueden mejorar estas estimaciones?

(*Indicación:* el ejercicio anterior podría ayudarte).

**11.** Se colorea el plano  $\mathbb{R}^2$  con dos colores. Es decir, a cada punto del plano se le asigna uno de esos dos colores. Demuestra que hay dos puntos a distancia 1 del mismo color.

**12.** En una clase se imparten 5 asignaturas, con dos posibles calificaciones cada una: suspenso y aprobado. ¿Cuántos alumnos tenemos que escoger para estar seguros de que 3 de ellos tienen las mismas notas en las 5 asignaturas?

**13.** ¿Se puede asegurar que hay (al menos) dos españoles tales que tengan: la misma inicial de su (primer) nombre, la misma inicial de su primer apellido, la misma letra del DNI, y que celebren su cumpleaños el mismo día?

(Nota: hay 27 posibles iniciales, pero solamente 23 posibles letras del DNI; y hay 366 posibles fechas de cumpleaños).

**14.** Demuestra que en cualquier reunión siempre hay dos personas que tienen el mismo número de conocidos (en dicha reunión).

(Nota: consideramos que ser conocido es algo mutuo; es decir, que si  $a$  conoce a  $b$ , entonces  $b$  conoce a  $a$ ; y que nadie se conoce a sí mismo).

**15.** Prueba que en cualquier reunión de 6 personas, o bien 3 de ellas se conocen entre sí, o bien 3 de ellas no se conocen entre sí.

(Nota: se aplican los mismos comentarios que en el ejercicio anterior).

(Indicación: dibuja un hexágono con todas sus diagonales y pinta de rojo o azul las líneas en función de si se conocen o no).

**16.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  números naturales. Prueba que existe algún subconjunto no vacío de  $S$  tal que la suma de sus elementos es múltiplo de  $n$ .

(Indicación: asocia a cada subconjunto el valor, módulo  $n$ , de la suma de sus elementos).

**17.** Demuestra que en cualquier subconjunto de  $n + 1$  elementos del conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  hay un elemento que divide a otro.

(Indicación: construye los palomares en función del máximo divisor impar de cada número).

**18.** Demuestra que existe una potencia de 3 cuya expresión decimal acaba en 001.

(Indicación: observa que hay 1000 posibles restos módulo 1000).

**19.** a) Sea  $p$  un número primo y  $n$  un entero positivo. ¿Cuál es la potencia de  $p$  en la descomposición en factores primos de  $n!$ ?

b) Halla el número de ceros en que termina el número  $200!$ .