EJERCICIOS TEMA 1

**PROBLEMA ♯1.** Dados los vectores:

$$\vec{A} = 5\vec{u}_x - 2\vec{u}_y + \vec{u}_z$$
$$\vec{B} = -3\vec{u}_x + 4\vec{u}_z$$

calcule:

a. El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

b. El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

c. El ángulo $\theta_{AB}$ que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

**PROBLEMA ♯2.** Calcule la superficie y el volumen de una esfera de radio constante $R$ mediante la integración del diferencial de superficie y del diferencial de volumen, respectivamente.

**PROBLEMA ♯3.** Dada la función escalar

$$V(x, y, z) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2} \cdot e^{-\frac{\pi z}{4}},$$

determine en el punto $(1, 1, 0)$:

a. La dirección del máximo ritmo de crecimiento de $V$.

b. La magnitud del máximo ritmo de crecimiento de $V$.

c. El incremento de $V$ en la dirección $d\vec{l} = \vec{u}_x + \vec{u}_y$.

**PROBLEMA ♯4.** Calcule el flujo del campo vectorial

$$\vec{F} = \vec{u}_y$$

a través de un cilindro cerrado de longitud 2 m ($z \in [0, 2]$) y de 2 m de radio centrado en el origen.

**PROBLEMA ♯5.** Dado el campo vectorial

$$\vec{A}(r, \theta, \phi) = r \cdot \cos^2 \theta \cdot \vec{u}_r,$$

calcule:

a. Flujo a través de una esfera de radio $R/2$ con centro en el origen.

b. Divergencia de dicho campo.

**PROBLEMA ♯6.** Verifique el teorema de la divergencia para el campo

$$\vec{A} = 2xy \cdot \vec{u}_x + 3 \cdot \vec{u}_y + yz^2 \cdot \vec{u}_z,$$

en un cubo de lado unidad situado en el primer octante del sistema de coordenadas cartesiano con un vértice en el origen.

**PROBLEMA ♯7.** Verifique el teorema de la divergencia para el campo

$$\vec{F} = kr \cdot \vec{u}_r,$$

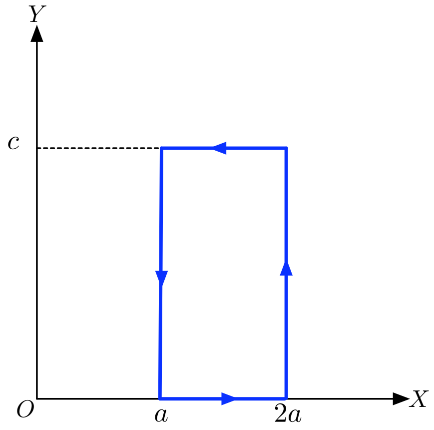
donde $k$ es una constante, en el volumen definido por dos superficies esféricas con centro en el origen de radios $R_1$ y $R_2$, siendo $R_2 > R_1$.

**PROBLEMA ♯8.** Sea el campo vectorial

$$\vec{A} = A_0 \cdot \left(y^2 \cdot \vec{u}_x - x^2 \cdot \vec{u}_y\right),$$

a. Calcule su circulación a lo largo del camino de la figura.

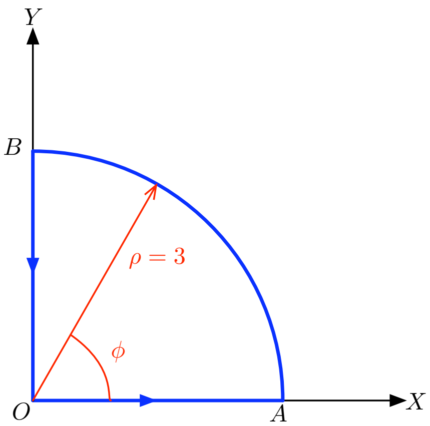
b. Compare el resultado obtenido con el flujo de $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ a través de la superficie del plano $XY$ delimitada por el camino anterior.




**PROBLEMA ♯9.** Calcule la circulación del campo vectorial

$$\vec{F} = xy \cdot \vec{u}_x - 2x \cdot \vec{u}_y$$

alrededor de la trayectoria $OABO$ mostrada en la figura




**PROBLEMA ♯10.** Dada la función vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = (x - C_1 z) \cdot \vec{u}_x + (C_2 x - 4z) \cdot \vec{u}_y + (x + C_3 y + C_4 z) \cdot \vec{u}_z$$

determine:

a. El valor de las constantes $C_1$, $C_2$ y $C_3$ para que $\vec{F}$ sea irrotacional.

b. El valor de la constante $C_4$ para que $\vec{F}$ sea solenoidal.

**PROBLEMA ♯11.** Determine si los siguientes campos vectoriales son irrotacionales, solenoidales, ambos o ninguno.

a. $\vec{A} = xy \cdot \vec{u}_x - y^2 \cdot \vec{u}_y + xz \cdot \vec{u}_z$.

b. $\vec{B} = r \cdot (\operatorname{sen} \phi \cdot \vec{u}_r + 2 \cos \phi \cdot \vec{u}_\phi)$.

c. $\vec{C} = x \cdot \vec{u}_x - 2y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z$.

d. $\vec{D} = \frac{k}{r} \cdot \vec{u}_r$.

**SOL. $\sharp$1:** **a.** $-11$. **b.** $-8\vec{u}_x - 23\vec{u}_y - 6\vec{u}_z$; **b.** $\theta_{AB} = 113.7^{\circ}$.

**SOL. $\sharp$2:** $S = 4\pi R^2$; $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

**SOL. $\sharp$3:** **a.** $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot (\vec{u}_x - \vec{u}_z)$; **b.** $= \frac{\pi}{4}$; **c.** $= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

**SOL. $\sharp$4:** $\Phi = 0$.

**SOL. $\sharp$5:** **a.** $\Phi = \frac{\pi R^3}{6}$; **b.** $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3 \cdot \cos^2 \theta$.

**SOL. $\sharp$6:** $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) dv = \frac{3}{2}$.

**SOL. $\sharp$7:** $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4\pi k \cdot \left( R_2^3 - R_1^3 \right)$.

**SOL. $\sharp$8:** **a.** $-A_0 \cdot ac \cdot (3a + c)$; **b.** $-A_0 \cdot ac \cdot (3a + c)$.

**SOL. $\sharp$9:** $\oint_{OABD} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -9 \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right)$.

**SOL. $\sharp$10:** **a.** $C_1 = -1, C_2 = 0, C_3 = -4$; **b.** $C_4 = -1$.

**SOL. $\sharp$11:** **a.** Ninguno; **b.** Ninguno; **c.** Ambos; **d.** Irrotacional.