EJERCICIOS CONJUNTOS, RELACIONES Y APLICACIONES

1) Define por extensión los siguientes conjuntos y calcula su cardinal:

a) A= Los números naturales impares menores que 11

b) B= Los números naturales pares mayores que 10 y menores o iguales que 20

c) C= Los números primos menores de 15

d) D= $\{4n+1 \,/\, 17 \le n < 41$ y n natural$\}$

e) E= $\{n$ natural $/\, 17 \le 4n+1 < 41\}$

f) F= $\{2n \in N \,/\, 11 \le n \le 19\}$

g) G= $\{n \in N \,/\, 11 \le 2n \le 19\}$

2) Define por comprensión los siguientes conjuntos

a) G= {7, 9, 11, 13, 15}

b) H= {9, 13, 17, 21}

c) I= {7, 11, 15, 19, 23}

d) J= {7, 10, 13, 16, 19, 22}

e) K= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

3) Determina si los siguientes conjuntos son vacíos, finitos, o infinitos

a) A = {vocales de la palabra "conjunto"}

b) B = {1,3,5,7,9, ...}

c) C = $\{n \in N \,;\, n < 15\}$

d) D = $\{n \in N \,;\, 5 < n < 5\}$

e) E = $\{n \in N \,/\, 15 < n\}$

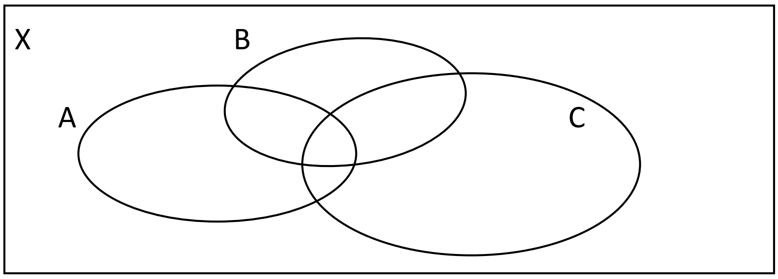
f) F = $\{n \in N \,/\, n$ es par $\}$

4) Sean A={1,2,3,4}, B={2,4,6,8}, C={3,4,5,6}. Halla $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$

5) Dado el conjunto $A = \{6, 2, 8, 4, 3\}$, obtén todos sus subconjuntos y |P(A)|.

6) ¿Cuál es la intersección y la unión de los conjuntos $A = \{e, x, i, t, o\}$ y $B = \{t, r, i, u, n, f, o\}$?

7) Sombrea en el diagrama de Venn a) $A \cap B \cap C$ b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



8) Se consideran los conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{3,4\}$. Calcula

a) $A \times (B \cup C)$ y $|A \times (B \cup C)|$

b) $(A \times B) \cup (A \times C)$ y su cardinal

c) $A \times (B \cap C)$ y su cardinal

d) $(A \times B) \cap (A \times C)$ y su cardinal

9) Se consideran los conjuntos A={a,b}, B={1,2,3}, C={2,3}. Calcula AxBxC y |AxBxC|.

10) Aplica las propiedades de las operaciones entre conjuntos para simplificar las siguientes expresiones:

a) $[A^c \cap B] \cap [A^c \cup B]^c$

b) $[(A \cap B) \cap C] \cup [(A \cap B) \cap C^c]$

11) Dados los conjuntos A = {1, 2, 3, 4} y B = {1, 3, 5} y dada la relación R de A en B definida por aRb $\Leftrightarrow$ a < b, describe los pares de la relación y su matriz.

12) Dados los conjuntos A={2, 3, 4, 5} y B={3, 6, 7, 10} y dada la relación R de divisibilidad de A en B definida por aRb $\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ / b = ka y representada por a|b (**a** divide a **b**), describe los pares de la relación y su matriz.

13) En el conjunto de los números naturales menores que 15, se considera la siguiente relación: aRb $\Leftrightarrow$ el resto de dividir a entre 7 coincide con el resto de dividir b entre 7. Describe los pares de la relación y dibuja el digrafo de la relación.

14) Halla el dominio y la imagen de cada una de las siguientes relaciones:

a) $R = \{(1,5), (4,5), (1,4), (4,6), (3,7), (7,6)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) R definida en $\mathbb{N}$ por $x\,R\,y \Leftrightarrow 2x + y = 16$

c) R definida en $\mathbb{N}$ por $x\,R\,y \Leftrightarrow 3x + y = 25$

15) Sea A={a, b, c, d} y R la relación en A cuya matriz es: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Determina los conjuntos $E = \{x \in A / (x, b) \in R\}$ y $F = \{x \in A / (d, x) \in R\}$.

16) Sea A = {1, 2, 3, 4, 5}. Estudia si las siguientes relaciones en A son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas:

a) $R_1 = \{(1,2), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4), (4,5)\}$.

b) $a\ R_2\ b \Leftrightarrow a \leq b$.

17) Sea A = {a, b, c, d} y R la relación en A cuya matriz es: $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Estudia si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

18) En el conjunto de los números naturales menores que 15, se considera la siguiente relación: aRb $\Leftrightarrow$ el resto de dividir **a** entre 7 coincide con el resto de dividir **b** entre 7. Estudia sus propiedades y encuentra todos los elementos relacionados con el 1.

19) Dada la relación definida en $\mathbb{Z}$ por: $a\ R\ b \Leftrightarrow a - b = 3k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Estudia si es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

20) Dada la relación definida en N por: $a\ R\ b \Leftrightarrow a - b = 3k$ con $k \in N$. Estudia si es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

21) Sea el conjunto P(A) de todos los subconjuntos de A={a,b,c} y la relación en P(A), definida por $M\,R\,N \Leftrightarrow M \cap N \neq \emptyset$. Obtén la matriz que representa la relación y averigua si es una relación reflexiva, simétrica y/o transitiva.

22) En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, se define la relación: aRb $\Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b$. Averigua si es relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva) y encuentra todos los números enteros relacionados con 5 ([5] clase de equivalencia de 5).

23) En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b)R\,(c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Averigua si es de equivalencia y, si lo es, calcula la clase de equivalencia del elemento $[(4,8)]$.

24) En el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b)R\,(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Averigua si es de equivalencia y, si lo es, calcula la clase del elemento $[(2,5)]$.

25) Estudia si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Dados x, y $\in$R, xRy $\Leftrightarrow$ x^2=y es aplicación.
b) Dados x, y $\in$R, xRy $\Leftrightarrow$ x=y^2 es aplicación.
c) Dados x, y $\in$R, xRy $\Leftrightarrow$ x=2y+3 es aplicación biyectiva.
d) Dados x, y $\in$R, xRy $\Leftrightarrow$ $2 \cdot x^2$=y+3 es aplicación biyectiva.

26) Dados dos conjuntos A y B con |A|=n y |B|=m, y f:A$\to$B una aplicación. Responde a las siguientes preguntas y pon ejemplos en todos los casos.

a) ¿Cómo será la matriz f considerada como relación?
b) Si f:A$\to$B es inyectiva ¿Cómo será la matriz de f?¿Será n≤m ó m≤n?
c) Si f:A$\to$B es suprayectiva
d) Si f biyectiva ¿Cómo será la matriz de f?¿Cómo serán m y n?
e) ¿Cómo será el dígrafo de una aplicación f:A$\to$A? ¿y si f es inyectiva o suprayectiva?

27) Construir dos aplicaciones de A en B tal que una sea inyectiva y no suprayectiva, y la otra sea suprayectiva y no inyectiva.

28) Construir dos aplicaciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ tal que una sea inyectiva y no suprayectiva, y la otra sea suprayectiva y no inyectiva.

29) Estudia si las siguientes relaciones son aplicaciones y en caso afirmativo estudia sus propiedades (inyectiva, suprayectiva y biyectiva):

a) Dados a, b $\in\mathbb{Z}$, aRb $\Leftrightarrow$ a+b=1.
b) Dados a, b $\in\mathbb{N}$, aRb $\Leftrightarrow$ a+b=1.
c) Dados a, b $\in\mathbb{Z}$, aRb $\Leftrightarrow$ a+2b=1.
d) Dados a, b $\in\mathbb{Z}$, aRb $\Leftrightarrow$ 2a+b=1.

30) Dada la aplicación $f: \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tal que $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{2} & \text{si z par} \\ \dfrac{z-1}{2} & \text{si z impar} \end{cases}$ estudia si f es inyectiva y/o suprayectiva.