



# Universidad de Alcalá

## Escuela Politécnica Superior

Control I

## Apuntes

Alcalá de Henares - 23 de abril de 2014

Cartagena99

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

# Índice general

<b>1. Lugar geométrico de las raíces</b>	<b>3</b>
1.1. Problema 1 . . . . .	3
1.2. Problema 2 . . . . .	10
1.3. Problema 3 . . . . .	16
<b>2. Diagrama Bode</b>	<b>21</b>
2.1. Representación asintótica . . . . .	22
2.1.1. Factores básicos de $\mathbf{G}(j\omega)$ . . . . .	23
2.2. Trazado de diagramas de Bode . . . . .	28
2.3. Trazado rápido . . . . .	30
<b>3. Compensación o diseño de PID</b>	<b>34</b>
3.1. Problema 1 . . . . .	34
3.2. Problema 2 . . . . .	37
3.3. Problema 3 . . . . .	41
3.4. Problema 4 . . . . .	45
3.5. Problema 5 . . . . .	47
3.6. Problema 6 . . . . .	48
3.7. Problema 7 . . . . .	52
3.8. Problema 8 . . . . .	55
3.9. Problema 9 . . . . .	57
3.10. Problema 10 . . . . .	59
3.11. Problema 11 . . . . .	61
3.12. Problema 12 . . . . .	64



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Capítulo 1

## Lugar geométrico de las raíces

### 1.1. Problema 1

El circuito de la figura 1.1 corresponde a un sistema de control con realimentación unitaria.

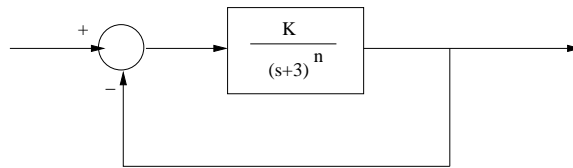


Figura 1.1: Control con realimentación unitaria

Se pide:

- Calcular y dibujar el lugar de las raíces del sistema para  $K > 0$ , suponiendo que  $n=2$
- Estudiar el comportamiento dinámico del sistema
- Hallar el valor de  $K$  que correspondería a un coeficiente de amortiguamiento de valor 0,5
- Suponiendo que el valor del exponente  $n$  pasa a valer 3, dibujar el nuevo lugar de las raíces y explicar como evoluciona respecto al anterior
- Explicar el comportamiento dinámico

### SOLUCIÓN

#### a) Lugar de las raíces con $n=2$

El lugar de las raíces es el lugar geométrico que describirían los polos de la función de transferencia  $C(s)/R(s)$  cuando varía un parámetro, generalmente una ganancia  $K$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- **Ramas**

Nº de polos:  $n_p=2$   $p_1 = -3$   $p_2 = -3$

Nº de ceros:  $n_z=0$

Nº de ramas:  $n_r=\text{máx}[n^\circ \text{ de polos}, n^\circ \text{ de ceros}]=\text{máx}[2,0]=2$

Nº de asíntotas (ramas que terminan en el infinito):  $n_a = n_p - n_z=2$

Las ramas comienzan en los polos y, en este caso, terminan en el infinito. Otras veces terminarían en los ceros.

- **Lugar de las raíces en el eje real**

Un punto del eje real es lugar de las raíces si mirando hacia la derecha se encuentra con un número impar de polos y ceros. Como los complejos se presentan por pares conjugados, solo afectan los polos y ceros que están en el eje real.

En nuestro caso el eje real no es del lugar de las raíces.

- **Asíntotas**

Nº de asíntotas:  $n_a = n_p - n_z = 2$

Centroide:  $\sigma_c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n_a} = -3$

Ángulo de las asíntotas:  $\gamma_m = \frac{180}{n_a}(2k + 1)$  con  $k= 0, 1, \dots$

En nuestro caso  $\gamma_m = \pm 90^\circ$

- **Puntos de dispersión sobre el eje real**

De la ecuación  $1 + G(s)H(s) = 0$  se despeja  $K$  y los puntos de dispersión se calculan de:  $\frac{dK}{ds} = 0$

En nuestro caso:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{(s+3)^2} = 0$$

$$K = -(s+3)^2 \tag{1.2}$$

$$\frac{dK}{ds} = -2(s+3) = 0$$

$$s = -3 = \sigma_D$$

- **Puntos de corte con el eje imaginario**

Se calculan de la ecuación característica  $1+G(s)H(s) = 0$

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{(s+3)^2} = 0$$

$$(s+3)^2 + K = 0 \tag{1.3}$$

$$s^2 + 6s + 9 + K = 0$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 + 6j\omega + 9 + K &= 0 \\
 6\omega &= 0 \\
 9 + K &= \omega^2
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

de donde se deduce  $\omega = 0$  y  $K = -9$  lo cual es imposible porque  $K > 0$ . No hay cortes con el eje imaginario.

También se podría haber aplicado el criterio de estabilidad de **Routh-Hurwitz**. Para comprobar que las raíces de un polinomio con todos sus términos positivos, como:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{1.5}$$

estén en el semiplano izquierdo, se colocan en la primera fila los términos pares  $a_0, a_2, a_4, \dots$  y en la segunda fila los impares  $a_1, a_3, a_5, \dots$  como se indica en la figura 1.2

$$\begin{array}{l|cccc}
 s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\
 s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots \\
 s^{n-4} & d_1 & d_2 & \dots & & \\
 \vdots & \dots & & & & 
 \end{array}$$

Figura 1.2: Criterio de Routh

Los coeficientes  $b_i$  se calculan según:

$$b_i = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_{2i} \\ a_1 & a_{2i+1} \end{vmatrix}}{a_1} \tag{1.6}$$

y análogamente los coeficientes  $c_i$  y  $d_i$ :

$$c_i = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_{2i+1} \\ b_1 & a_{i+1} \end{vmatrix}}{b_1} \quad d_i = \frac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_{i+1} \\ c_1 & c_{i+1} \end{vmatrix}}{c_1} \tag{1.7}$$

El cálculo de los coeficientes  $b_i$  continúa hasta que todos sean cero y el proceso continúa hasta llegar a la fila  $s^1$ . El conjunto completo adquiere forma triangular.

El criterio de estabilidad establece que el número de raíces con parte real positiva



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

$$\begin{array}{c|cc}
 s^2 & 1 & 9+K \\
 s^1 & 6 & \\
 s^0 & 9+K & 
 \end{array}$$

Figura 1.3: Tabla de Routh

en la que se aprecia que todos los elementos de la primera columna son positivos independientemente de K, al ser  $K > 0$ . Valga lo que valga K las raíces están siempre en el lado izquierdo y no cortan al eje imaginario porque si nó pasarían al semiplano derecho. El sistema siempre será estable, valga lo que valga K.

■ **Ángulos de arranque desde los polos o de entrada a los ceros**

Para hallar el ángulo con el que se sale desde un polo complejo (o con el que se entra en un cero complejo) se restan (o suman) a  $180^\circ$  los ángulos formados por las líneas que salen de ese polo (o cero), a los demás polos y se suman (o restan) los ángulos de las que vayan a los ceros. A este criterio se le puede llamar angular.

En el caso de que todos los polos y ceros no sean complejos se puede aplicar el criterio de fase:  $\varphi_{G(s)H(s)} = 180^\circ(2k + 1)$ .

En nuestro caso:

$$\begin{aligned}
 -2\theta &= 180^\circ(2k + 1) \\
 \theta &= -90^\circ(2k + 1) \quad \theta_{D1} = -90^\circ \quad \theta_{D2} = 90^\circ
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

El lugar de las raíces se representa en la figura 1.4.

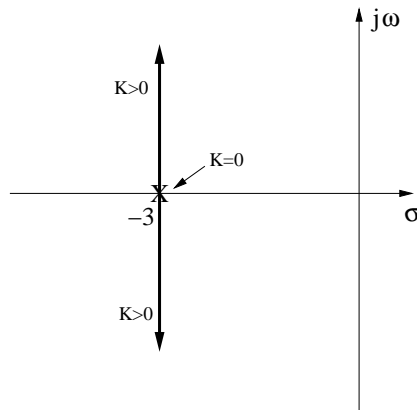


Figura 1.4: Lugar de las raíces

Con  $K=0$  los polos coinciden con los de lazo abierto y según varía K se desplazan por el lugar de las raíces. Por mucho que aumente K los polos siempre están en



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

en donde  $\xi$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema que representa la frecuencia a la que oscilaría el sistema si no tuviera amortiguamiento, es decir con  $\xi = 0$ . Esta frecuencia no es observable. La frecuencia de oscilación que puede observarse en el transitorio es la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  que siempre es más pequeña que la frecuencia natural  $\omega_n$ .

Cuando  $\xi = 1$  el amortiguamiento es crítico, si  $\xi < 1$  el sistema es subamortiguado y con  $\xi > 1$  es sobreamortiguado.

Tanto el valor de  $\xi$  como el de  $\omega_n$  dependen de donde están situados los polos. Esta relación para un par de polos complejos conjugados situados en  $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$  se muestra en la figura 1.5

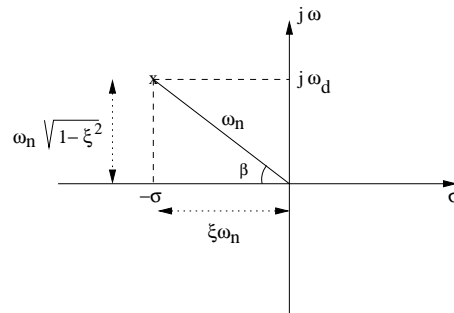


Figura 1.5: Relación de  $\xi$ ,  $\omega_n$ , y  $\omega_d$  con la posición de los polos

Nótese que  $\cos\beta = \xi$ .

La función de transferencia de nuestro sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K}{(s+3)^2+K} = \frac{K}{s^2+6s+9+K} \quad (1.10)$$

y comparando las ecuaciones características, resulta:

$$\begin{aligned} 2\xi\omega_n &= 6 \\ \omega_n^2 &= 9 + K \end{aligned} \quad (1.11)$$

El amortiguamiento crítico ocurre con  $\xi = 1$  por lo que  $\omega_n = 3$  y  $K=0$ . Para valores de  $\xi < 1$  el sistema es subamortiguado que corresponde a valores de  $\omega_n > 3$  y  $K > 0$ . Los valores de  $K < 0$  no se consideran en este problema.

c) Valor de  $K$  para que  $\xi = 0,5$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

los polos estarían situados en  $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d = -3 \pm j3\sqrt{3}$  que, por supuesto, pertenece al lugar de las raíces.

El ángulo  $\beta$  valdría  $\tan\beta = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \quad \beta = 60^\circ$

#### d) Lugar de las raíces para $n=3$

Se parte de la función en lazo abierto del sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+3)^3} \quad (1.14)$$

y para dibujar el lugar de las raíces se siguen los pasos siguientes:

##### ■ Ramas

Nº de polos:  $n_p=3 \quad p_1 = -3 \quad p_2 = -3 \quad p_3 = -3$

Nº de ceros:  $n_z=0$

Nº de ramas:  $n_r = \max[\text{nº de polos}, \text{nº de ceros}] = \max[3,0] = 3$

Nº de asíntotas (ramas que terminan en el infinito):  $n_a = n_p - n_z = 3$

Las ramas comienzan en los polos y, en este caso, terminan en el infinito. Otras veces terminarán en los ceros.

##### ■ Lugar de las raíces en el eje real

Un punto del eje real es lugar de las raíces si mirando hacia la derecha se encuentra con un número impar de polos y ceros. Como los complejos se presentan por pares conjugados, solo afectan los polos y ceros que están en el eje real.

En nuestro caso el tramo  $[-\infty, -3]$  es del lugar de las raíces.

##### ■ Asíntotas

Nº de asíntotas:  $n_a = n_p - n_z = 3$

Centroide:  $\sigma_c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n_a} = -3$

Ángulo de las asíntotas:  $\gamma_m = \frac{180}{n_a}(2k+1)$  con  $k=0, 1, \dots$

En nuestro caso  $\gamma_{m1} = 60^\circ \quad \gamma_{m2} = 180^\circ \quad \gamma_{m3} = -60^\circ$

##### ■ Puntos de dispersión sobre el eje real

De la ecuación  $1 + G(s)H(s) = 0$  se despeja  $K$  y los puntos de dispersión se calculan de:  $\frac{dK}{ds} = 0$

En nuestro caso:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K}{(s+3)^3} = 0$$

$$K = -(s+3)^3$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99



$$\begin{aligned}
 1 + G(s)H(s) &= 1 + \frac{K}{(s+3)^3} = 0 \\
 (s+3)^3 + K &= 0 \\
 s^3 + 9s^2 + 27s + 27 + K &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

En el eje imaginario  $s = j\omega$  y la ecuación anterior se transforma en:

$$-j\omega^3 - 9\omega^2 + j27\omega + 27 + K = 0 + j0$$

Igualando las partes imaginarias y reales a cero, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -\omega^3 + 27\omega &= 0 \\
 9\omega^2 - 27 - K &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

cuyas soluciones son  $\omega = 0$  y  $K = -27$  que no es válida al tener que ser  $K > 0$  y  $\omega = \sqrt{27}$  y  $K = 216$ . Los puntos de corte con el eje imaginario ocurren en  $\pm j\sqrt{27} = \pm j5,19$

Aplicando el criterio de Routh, la tabla corresponde con la de la figura 1.6.

$s^3$	1	27
$s^2$	9	$27+K$
$s^1$	$\frac{216-K}{9}$	
$s^0$	$27+K$	

Figura 1.6: Tabla de Routh

en la que se aprecia que todos los elementos de la primera columna serán positivos cuando  $K < 216$ . Si  $K = 216$  las raíces están justamente en el eje imaginario y si  $K > 216$  pasarían al semiplano derecho haciéndose inestable. El último término de la columna siempre es positivo al ser  $K > 0$ .

Los valores de  $\omega$  que corresponden a este valor de  $K$  se deducen de:

$$\begin{aligned}
 9\omega^2 - 27 - K &= 0 \\
 9\omega^2 - 27 - 216 &= 0 \\
 \omega^2 = \frac{243}{9} = 27 &\quad \omega = \sqrt{27}
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

y los puntos de corte con el eje imaginario ocurren en  $\pm j\sqrt{27} = \pm j5,19$ .

- **Ángulos de arranque desde los polos o de entrada a los ceros** Aplicando el



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

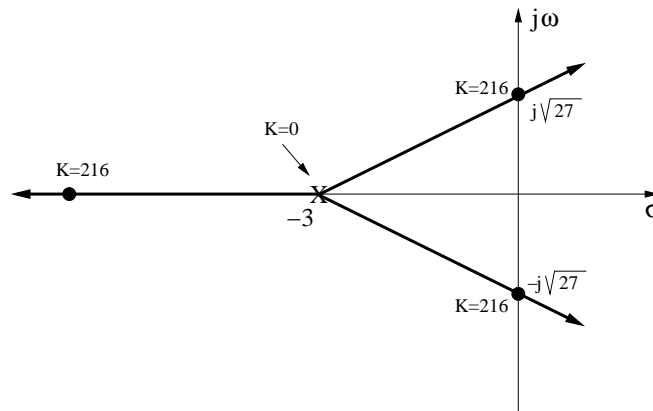


Figura 1.7: Lugar de las raíces

Al tener tres polos el sistema puede hacerse inestable porque la condición de fase de  $\varphi_{G(s)H(s)} = 180^\circ$  puede ser alcanzada (se podrían alcanzar  $270^\circ$  en el infinito), cosa que es imposible en los sistemas con dos polos que, en el mejor de los casos, podrían alcanzar un desfase de  $180^\circ$  en el infinito y con ganancias infinitas.

■ **Comportamiento dinámico**

Ahora el sistema es de tercer orden. Teniendo en cuenta que con  $K = 0$  los polos son reales pero están a punto de que dos de ellos se hagan complejos, el valor de  $K = 0$  corresponde al amortiguamiento crítico.

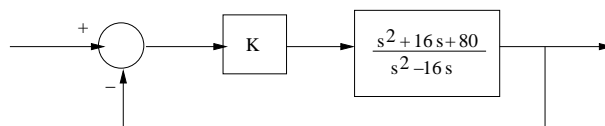
Desde  $0 < K < 216$  aparecen oscilaciones por lo que el sistema es subamortiguado. Para que un sistema sea sobreamortiguado sus polos han de ser reales y no existen oscilaciones.

Para  $K = 216$  los polos son imaginarios puros y las oscilaciones se mantienen. El sistema es oscilante.

Cuando  $K > 216$  el sistema es inestable y la respuesta al impulso sería creciente con el tiempo hasta destruirse porque alguna de sus variables alcanzaría valores superiores a los permitidos.

## 1.2. Problema 2

En el sistema de control de la figura 1.8, se pide:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

d) Obtener el valor de los polos dominantes que hacen que el sistema responda con un máximo sobreimpulso del 0,434% cuando se le introduce una señal escalón. (Se obtendrán de manera aproximada utilizando el procedimiento gráfico a partir del lugar de las raíces)

Nota: El valor del sobreimpulso máximo es  $M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

### SOLUCIÓN

#### a) Margen de estabilidad

La ecuación característica es:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s^2 + 16s + 80)}{s^2 - 16} = 0 \quad (1.20)$$

$$(1 + K)s^2 + 16Ks + 80K - 16 = 0$$

La tabla del criterio de Routh se encuentra en la figura 1.9:

$s^2$	1+K	80K-16
$s^1$	16K	
$s^0$	80K-16	

Figura 1.9: Criterio de Routh

Para que los elementos de la primera columna sean positivos se necesita que:

$$\begin{aligned} 1 + K > 0 \quad K > -1 \\ 16K > 0 \quad K > 0 \\ 80K - 16 > 0 \quad K > 0,2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

El más restrictivo es  $K > 0,2$ . Con valores de K que cumplan esta condición el sistema siempre será estable.

#### b) Lugar de las raíces

Se parte de la función en lazo abierto del sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{Ks^2 + 16Ks + 80K}{s^2 - 16} \quad (1.22)$$

##### ■ Ramas

No de polos = 2      No de ceros = 2

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- **Lugar de las raíces en el eje real**

Un punto del eje real es lugar de las raíces si mirando hacia la derecha se encuentra con un número impar de polos y ceros. Como los complejos se presentan por pares conjugados, sólo afectan los polos y ceros que están en el eje real.

En nuestro caso el tramo  $[-4, 4]$  es del lugar de las raíces.

- **Asíntotas**

Nº de asíntotas:  $n_a = n_p - n_z = 0$  No tiene

- **Puntos de dispersión sobre el eje real**

De la ecuación  $1 + G(s)H(s) = 0$  se despeja  $K$  y los puntos de dispersión se calculan de:  $\frac{dK}{ds} = 0$

En nuestro caso:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s^2 + 16s + 80)}{s^2 - 16} = 0$$

$$K = \frac{-(s^2 - 16)}{s^2 + 16s + 80}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-2s(s^2 + 16s + 80) + (s^2 - 16)(2s + 16)}{(s^2 + 16s + 80)^2} \quad (1.23)$$

$$-16s^2 - 192s - 256 = 0$$

$$s^2 + 12s + 16 = 0$$

$$\sigma_{D1} = -1,55 \quad \sigma_{D2} = -10,45$$

El punto de dispersión  $\sigma_{D2}$  no es válido al no pertenecer al lugar de las raíces.

El valor de  $K$  correspondiente a  $s = -1,55$  es:

$$K = \frac{-(s^2 - 16)}{s^2 + 16s + 80} = \frac{-((-1,55)^2 - 16)}{(-1,55)^2 + 16(-1,55) + 80} = 0,236 \quad (1.24)$$

- **Puntos de corte con el eje imaginario**

Ecuación característica  $1 + G(s)H(s) = 0$

$$(1 + K)s^2 + 16Ks + 80K - 16 = 0 \quad (1.25)$$

Aplicando el criterio de Routh, la tabla corresponde con la de la figura 1.9.

en la que se aprecia que el límite de la estabilidad (eje  $j\omega$ ) ocurre cuando:

$$1 + K = 0$$

$$16K = 0 \quad (1.26)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$s^2 - 16 = 0 \quad (1.28)$$

y los puntos de corte serían:  $s = \pm 4$  que son reales y no corresponden al eje  $j\omega$ .

De la última ecuación,  $K = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$  resultando la ecuación:

$$6s^2 + 16s = 0 \quad (1.29)$$

cuyas soluciones son  $s = \frac{-8}{3}$  real y por lo tanto no válida y  $s = 0$  que es el único punto de corte con el eje imaginario.

■ **Ángulos de salida desde los polos o de entrada a los ceros**

Siguiendo el criterio angular, en la figura 1.10 puede apreciarse los ángulos a sumar y restar correspondientes al primer polo.

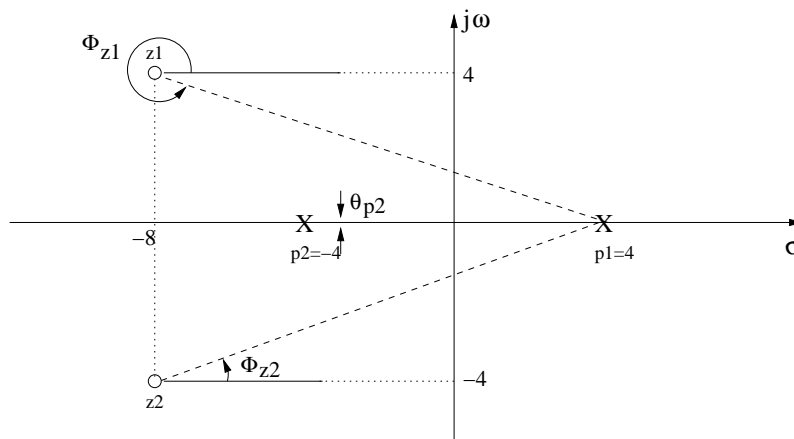


Figura 1.10: Ángulo de salida desde el polo  $p_1$

$$\begin{aligned} \theta_{p1} &= 180 - \theta_{p2} + \phi_{z1} + \phi_{z2} = 180 - 0 + \arctan\left(\frac{-4}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{12}\right) = \\ &= 180 + 360 - \arctan\left(\frac{4}{12}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{12}\right) = 180 \end{aligned} \quad (1.30)$$

En la figura 1.11 puede apreciarse los ángulos a sumar y restar correspondientes al segundo polo.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

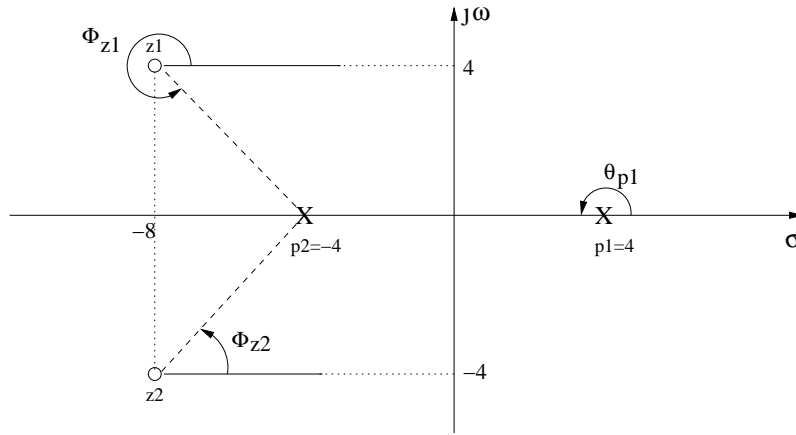


Figura 1.11: Ángulo de salida desde el polo  $p_2$

$$\theta_{p2} = 180 - \theta_{p1} + \phi_{z1} + \phi_{z2} = 180 - 180 + 360 - \arctan\left(\frac{4}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \quad (1.31)$$

En la figura 1.12 puede apreciarse los ángulos a sumar y restar correspondientes al primer cero.

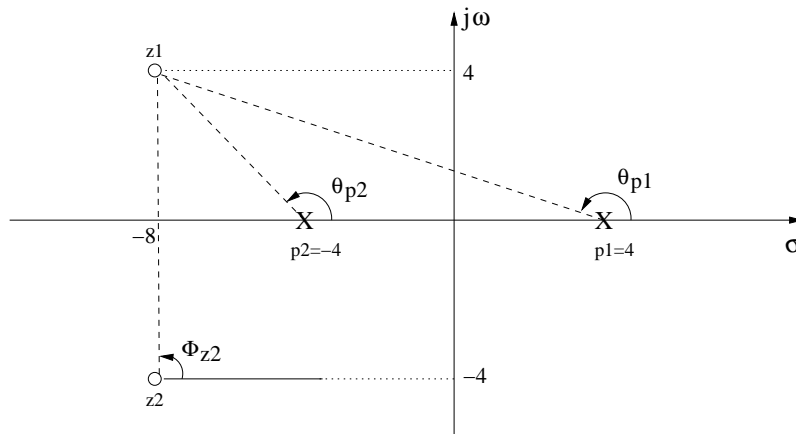


Figura 1.12: Ángulo de entrada al cero  $z_1$

$$\phi_{z1} = 180 + \theta_{p1} + \theta_{p2} - \phi_{z2} = 180 + 180 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{12}\right) + 180 - \tan^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) - 90 = 26,57^\circ$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

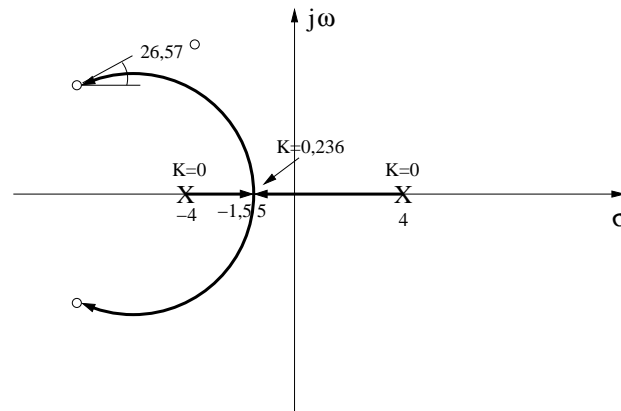


Figura 1.13: Lugar de las raíces

### ■ Comportamiento dinámico

Dependiendo de los valores de  $K$  el sistema se comporta de la siguiente manera:

$0 < K < 0,2$  Sistema inestable

$0,2 < K < 0,236$  Los polos son reales. Sobreamortiguado.

$K = 0,236$  Los polos están a punto de ser complejos. Amortiguamiento crítico.

$K > 0,236$  Polos complejos. Sistema subamortiguado.

### ■ Situación de los polos para un sobreimpulso determinado

El sobreimpulso queda determinado por el valor del amortiguamiento según la ecuación:

$$M_p = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Tomando neperianos:

$$\begin{aligned} \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} &= \ln M_p \\ \pi^2\xi^2 &= (1-\xi^2)(\ln M_p)^2 \\ \xi^2[\pi^2 + (\ln M_p)^2] &= (\ln M_p)^2 \\ \xi &= \frac{\ln M_p}{\sqrt{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} \\ \xi &= \frac{\ln 0,00434}{\sqrt{\pi^2 + (\ln 0,00434)^2}} = 0,866 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Como  $\cos\beta = \xi$  resulta  $\beta = \cos^{-1}\xi = \cos^{-1}0,866 = 30^\circ$ . Trazando este ángulo en la gráfica del lugar de las raíces se obtiene la figura 1.14

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

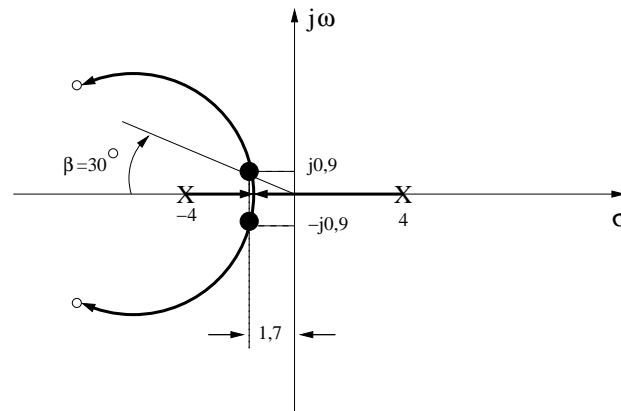


Figura 1.14: Ubicación de los polos para un sobreimpulso del 0,434 %

en donde se aprecia que el valor aproximado de la situación de los polos es  $p_{1,2} = -1,7 \pm j0,9$

### 1.3. Problema 3

Un sistema de control en lazo cerrado tiene la siguiente ecuación característica en su forma polinómica:

$$s^2(s + 9) + K(s + 1) = 0$$

- Calcular la ganancia en lazo abierto  $G(s)H(s)$  del sistema en función de  $K$ , suponiendo que dicho sistema tiene un cero en  $s = -1$
  - Dibujar el lugar de las raíces para valores de  $K$  mayores de cero
  - Estudiar el comportamiento dinámico del sistema
  - A partir del lugar de las raíces, calcular el valor de los polos dominantes para que el tiempo de establecimiento valga 6,28 s
  - En las condiciones del apartado anterior calcular el valor del tercer polo y el valor de  $K$
- Nota: El tiempo de establecimiento viene dado por  $t_s = \frac{\pi}{\xi\omega_n}$

### SOLUCIÓN

#### a) Ganancia en lazo abierto

La ecuación característica corresponde a

$$1 + G(s)H(s) = 0 = s^2(s + 9) + K(s + 1) = 1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



- **Ramas**

Nº de polos:  $n_p=3$   $p_1 = 0$   $p_2 = 0$   $p_3 = -9$

Nº de ceros:  $n_z=1$   $z_1 = -1$

Nº de ramas:  $n_r=\text{máx}[n^\circ \text{ de polos, } n^\circ \text{ de ceros}]=\text{máx}[3,1]=3$

Nº de asíntotas (ramas que terminan en el infinito):  $n_a = n_p - n_z = 2$

Las ramas comienzan en los polos y, en este caso, una termina en el cero y dos en el infinito.

- **Lugar de las raíces en el eje real**

Un punto del eje real es lugar de las raíces si mirando hacia la derecha se encuentra con un número impar de polos y ceros. Como los complejos se presentan por pares conjugados, sólo afectan los polos y ceros que están en el eje real.

En nuestro caso el tramo  $[-9, -1]$  es del lugar de las raíces.

- **Asíntotas**

Nº de asíntotas:  $n_a = n_p - n_z = 2$

Centroide:  $\sigma_c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n_a} = \frac{-9 - (-1)}{2} = -4$

Ángulo de las asíntotas:  $\gamma_m = \frac{180}{n_a}(2k + 1)$  con  $K= 0, 1, \dots$

En nuestro caso  $\gamma_m = 90^\circ(2k + 1) = \pm 90^\circ$

- **Puntos de dispersión sobre el eje real**

De la ecuación  $1 + G(s)H(s) = 0$  se despeja  $K$  y los puntos de dispersión se calculan de:  $\frac{dK}{ds} = 0$

En nuestro caso:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{s^2(s+9)} = 0$$

$$K = \frac{-s^2(s+9)}{s+1}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{(-3s^2 - 18s)(s+1) + (s^3 + 9s^2)}{(s+1)^2} = 0 \quad (1.34)$$

$$s^3 + 6s^2 + 9s = 0$$

$$\sigma_{D1} = 0 \quad \sigma_{D2} = -3 \quad (\text{doble})$$

Los valores de  $K$  correspondientes a  $s = 0$  y  $s = -3$  son  $K = 0$  y:

$$K = \frac{-s^2(s+9)}{s+1} = \frac{-(-3)^2(-3+9)}{-3+1} = 27 \quad (1.35)$$

También se pueden calcular más fácilmente mediante la condición de módulo  $|G(s)H(s)| = 1$  ya que siempre que estemos en algún lugar de las raíces, el módulo de la ganancia



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

▪ **Puntos de corte con el eje imaginario**

Aplicando el criterio de Routh, la tabla de la ecuación característica corresponde a la de la figura 1.15.

$s^3$	1	K
$s^2$	9	K
$s^1$	$\frac{8}{9K}$	
$s^0$	K	

Figura 1.15: Criterio de Routh

El límite de la estabilidad (eje  $j\omega$ ) ocurre cuando  $K = 0$  y los puntos de corte ocurrirían en  $s = 0$  y  $s = -9$ . Este último punto no es válido al ser real y no corresponder con el eje  $j\omega$  y el punto de corte  $s = 0$  es doble por lo que realmente será una tangencia.

▪ **Ángulos de salida desde los polos o de entrada a los ceros**

En la figura 1.16 puede apreciarse los ángulos a sumar y restar, que son sencillos al estar los polos y ceros en el eje real.

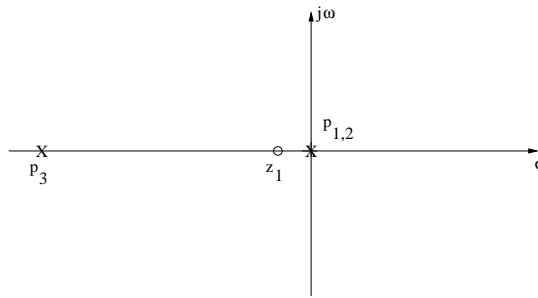


Figura 1.16: Polos y ceros de la ecuación característica

$$\begin{aligned}
 2\theta_{p1,2} &= \pm 180 - \theta_{p3} + \phi_{z1} = \pm 180 - 0 + 0 = \pm 180 & \theta_{p1,2} &= \pm 90^\circ \\
 \theta_{p3} &= \pm 180 - \theta_{p1} - \theta_{p2} + \phi_{z1} = \pm 180 - 180 - 180 + 180 = 0^\circ & & (1.37) \\
 \phi_{z1} &= \pm 180 + \theta_{p1} + \theta_{p2} + \theta_{p3} = \pm 180 + 180 + 180 + 0 = 180^\circ
 \end{aligned}$$

El lugar de las raíces se representa en la figura 1.17.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

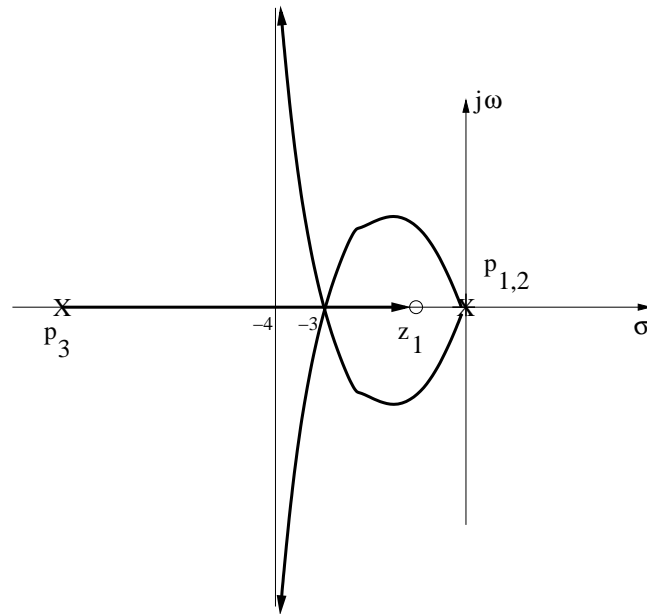


Figura 1.17: Lugar de las raíces

En el punto de dispersión, que corresponde a  $K = 27$ , los tres polos coinciden.

### c) Comportamiento dinámico

$0 < K < 27$  En cuanto  $K$  se hace positiva, hay dos polos complejos conjugados por lo que existen oscilaciones y el sistema es subamortiguado.

$K = 27$  En ese punto los tres polos son reales y, dos de ellos, están en el límite de hacerse complejos. Amortiguamiento crítico.

$K > 27$  El sistema oscila amortiguadamente. Subamortiguado.

### d) Situación de los polos para un tiempo de establecimiento determinado

El tiempo de establecimiento depende de la frecuencia natural  $\omega_n$  y del coeficiente de amortiguamiento  $\xi$  según la ecuación:

$$t_s = \frac{\pi}{\xi\omega_n}$$

Como según el enunciado  $t_s = 6,28$  segundos, entonces  $\xi\omega_n = 0,5$ . La parte real de los polos valdrá pues  $-\sigma = \xi\omega_n = 0,5$ .

La parte imaginaria se obtiene, aproximadamente, mirando en la gráfica del lugar de las raíces, resultando para los dos polos dominantes  $p_{1,2} = -0,5 \pm j0,5$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El valor de K puede obtenerse de la condición de módulo  $|G(s)H(s)| = 1$

$$K = \frac{-s^2(s+9)}{s+1} = \frac{-(-8)^2(-8+9)}{-8+1} = \frac{64}{7} = 9,14 \quad (1.39)$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, teal-colored font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a white, curved underline that resembles a stylized wave or a path.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Capítulo 2

# Respuesta en frecuencia. Diagramas de Bode

Es la respuesta en régimen permanente de un sistema ante una entrada sinusoidal. El estudio se hace variando la frecuencia de la señal de entrada en un rango de interés y observando la salida. No es necesario obtener las raíces de la ecuación característica.

Las pruebas son sencillas y muy precisas pudiéndose deducir la función de transferencia de sistemas complicados y extender el diseño a sistemas de control no lineales.

Es importante distinguir los diferentes dominios en los que se suele trabajar en teoría de control:

- **Dominio del tiempo:** Fácil de entender con los sentidos pero muy difícil el análisis matemático asociado (ecuaciones diferenciales que describen fenómenos físicos reales). En él todo es real y no serían necesarios los números complejos. Conceptos como velocidad de respuesta, constantes de tiempo, tiempos de subida, retardos, sobreimpulsos, amortiguamiento, etc. cobran todo su sentido. Por ejemplo, la tensión en bornas de un condensador sería:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int i_c(t) dt \quad (2.1)$$

- **Dominio de la frecuencia:** Es el dominio de la transformada de Fourier. Es un dominio imaginario cuya variable es la pulsación  $j\omega$ , donde  $\omega = 2\pi f$ . Las funciones de transferencia son fáciles de obtener porque se limitan a analizar el sistema bajo una excitación sinusoidal de forma análoga al análisis con fasores de circuitos en alterna. Por ejemplo, la tensión en bornas de un condensador sería:

$$V_c(j\omega) = \frac{I_c(j\omega)}{j\omega C} \quad (2.2)$$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font with a light blue shadow effect. The '99' is slightly larger and more prominent than the 'Cartagena' part.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Tanto en dominio transformado como en el de la frecuencia aparecen los conceptos de ancho de banda, funciones de transferencia, polos, ceros, etc.

En la figura 2.1 se representan algunos de los conceptos anteriormente descritos.

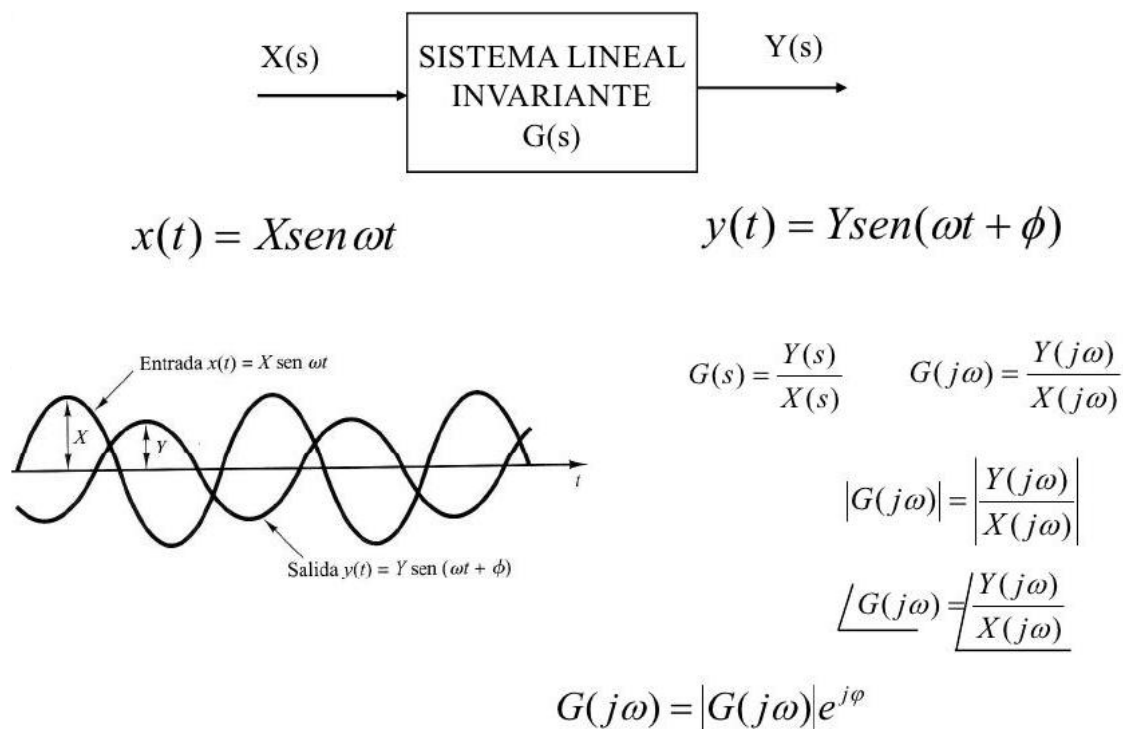


Figura 2.1: Representación de un sistema en el dominio transformado. Señales de entrada y salida en el dominio del tiempo. Funciones de transferencia en los dominios transformado y de la frecuencia. Módulo y fase de la función de transferencia en el dominio de la frecuencia

Tres son las herramientas que suelen emplearse en este dominio y las tres visualizan el mismo fenómeno desde diferentes puntos de vista: los diagramas de Bode, de Nyquist y de Nichols, que pueden representar cualquier función de transferencia pero la que más interés tiene es la ganancia de lazo  $G(j\omega)H(j\omega)$ .

## 2.1. Representación asintótica

El diagrama de Bode de una función de transferencia se representa mediante dos gráficas: la del logaritmo del módulo y la del ángulo de fase en función de  $\omega$ . La representación de una magnitud logarítmica expresada en decibelios es:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Las ventajas de utilizar diagramas de Bode son que las multiplicaciones de magnitudes se convierten en sumas y las divisiones en restas. Además, la escala logarítmica del eje de abscisas permite ampliar el rango de bajas frecuencias, ya que, la frecuencia  $\omega = 0$  se representa en el punto  $\log 0 = -\infty$  en el eje de abscisas. Es decir, el eje de abscisas no tiene valores de  $\omega$  negativos. Los valores negativos serían valores de  $\omega$  menores que 1, por lo que su logaritmo es negativo. Con todo, la ventaja más importante es que si se representan las asíntotas, en lugar de la función exacta, el trazado es inmediato con sólo saber la situación de los polos y ceros de la función de transferencia.

Las bandas de frecuencia pueden venir dadas en **octavas** o en **décadas**, como se representa en la figura 2.2



Figura 2.2: Bandas de frecuencia en los diagramas de Bode

La frecuencia  $f_2$  es  $n$  octavas más alta que  $f_1$  cuando  $f_2 = 2^n f_1$  y análogamente la definición de década sería  $f_2 = 10^n f_1$ . La octava se corresponde con una escala musical.

### 2.1.1. Factores básicos de $G(j\omega)$

En general la función de transferencia podría expresarse de la forma:

$$G(j\omega) = \frac{K A_1(j\omega) A_2(j\omega) \cdots}{B_1(j\omega) B_2(j\omega) \cdots} \quad (2.5)$$

y en dB sería:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |K| + 20 \log |A_1(j\omega)| + 20 \log |A_2(j\omega)| - 20 \log |B_1(j\omega)| - 20 \log |B_2(j\omega)| - \cdots \quad (2.6)$$

y respecto a la fase:

$$\angle G(j\omega) = \angle K + \angle A_1(j\omega) + \angle A_2(j\omega) - \angle B_1(j\omega) - \angle B_2(j\omega) - \cdots \quad (2.7)$$

Obsérvese cómo al expresarlo en dB los factores se convierten en sumandos y la gráfica total, tanto del módulo como de la fase, será la suma de las gráficas parciales de cada sumando. Además, las funciones a representar son del tipo  $f(\log \omega)$  lineales, por lo que si el eje de abscisas se toma  $x = \log \omega$  en vez de  $\omega$  las funciones  $f(x)$  que hay que representar líneas

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Si los polos o ceros son múltiples, el problema se reduce a sumar tantas veces la misma gráfica como orden de multiplicidad tenga.

El valor de  $\omega_1$  es real y positivo y estamos diciendo que existe un polo o cero en  $\omega_1$ . En el dominio de la frecuencia no es del todo apropiado hablar de polos y ceros. Su significación plena está en el dominio transformado. El término  $j\omega + \omega_1$  se transformaría en  $s + \omega_1$  y el polo, propiamente dicho, estaría situado en  $s = -\omega_1$ . Teniendo esto en cuenta, se seguirá hablando de polos y ceros en el dominio de la frecuencia.

#### a) Factor ganancia K

El módulo será  $20 \log |K| = C^{te}$  y la fase podrá ser  $0^\circ$  o  $180^\circ$ . La representación, en el caso de  $K$  negativa, se indica en la figura 2.3

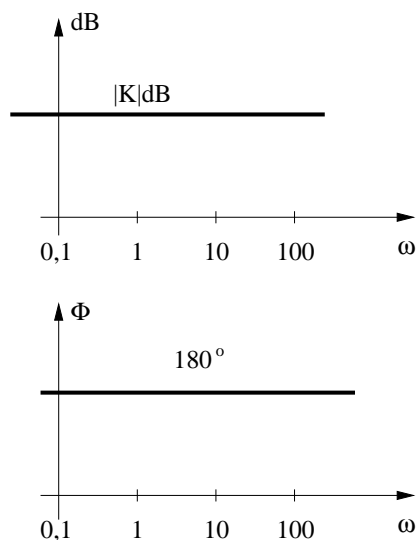


Figura 2.3: Representación exacta en diagramas de Bode de una constante negativa

#### b) Factores integrales y derivativos $(j\omega)^{\pm 1}$

En estos casos también se representa la función exacta y no las asíntotas.

En el caso de corresponder a un cero, el factor sería  $(j\omega)$ .

- Módulo de  $(j\omega)$ :

$$20 \log |j\omega| = 20 \log \omega \text{ dB} \quad (2.8)$$

- Fase de  $(j\omega)$ :

$$\Phi = 90^\circ \quad (2.9)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70



- Fase de  $(j\omega)$ :

$$\Phi = -90^\circ \tag{2.11}$$

El problema se reduce a representar funciones del tipo  $\pm 20 \log \omega$  en un plano en el que el eje de abscisas es, precisamente,  $\log \omega$  por lo que serán líneas rectas de pendiente  $\pm 20 \text{dB/década}$  que pasan por el origen. Si la pendiente se expresara en  $\text{dB/octava}$  la relación lineal entre ellas es:  $20 \text{ dB/década} = 6 \text{ dB/octava}$ .

Su representación gráfica se muestra en la figura 2.4

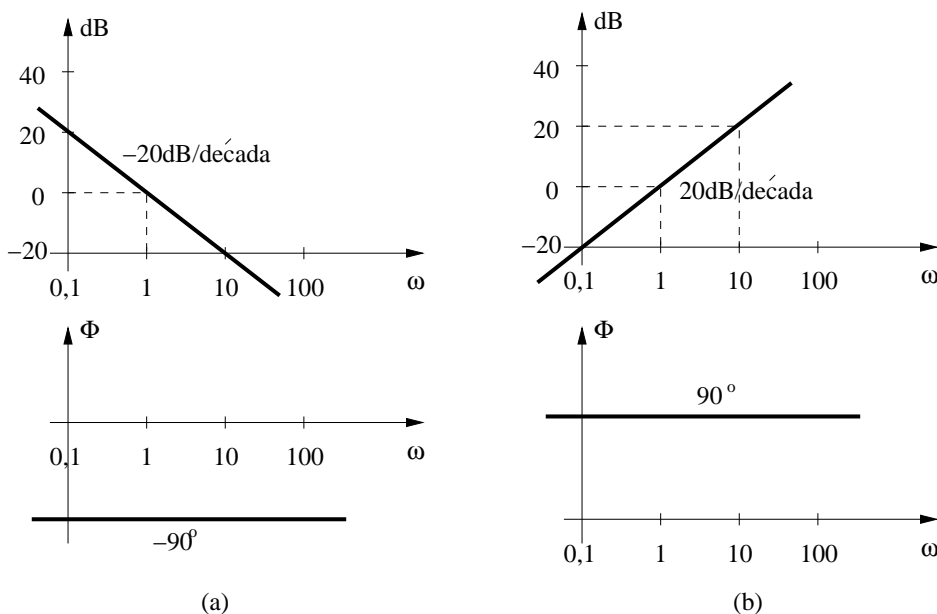


Figura 2.4: Representación exacta en diagramas de Bode de (a) factor integral  $(j\omega)^{-1}$  y (b) factor derivativo  $(j\omega)$

Nótese que el origen está situado en el punto  $(\omega, \text{dB}) = (1, 0)$  que en papel semilogarítmico sería  $(\log \omega, \text{dB}) = (0, 0)$ .

c) **Factores de primer orden  $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})^{\pm 1}$**  En el caso de un cero:

- Módulo de  $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})$ :

$$20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_1} \right| = 20 \log \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2} = \begin{cases} \omega < \frac{\omega_1}{10} \implies \simeq 20 \log 1 = 0 \text{dB} & \text{Asíntota 1} \\ \omega_c = \omega_1 \implies = 10 \log 2 = 3 \text{dB} \end{cases}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

La representación de las asíntotas y de la curva exacta se indica en la figura 2.5

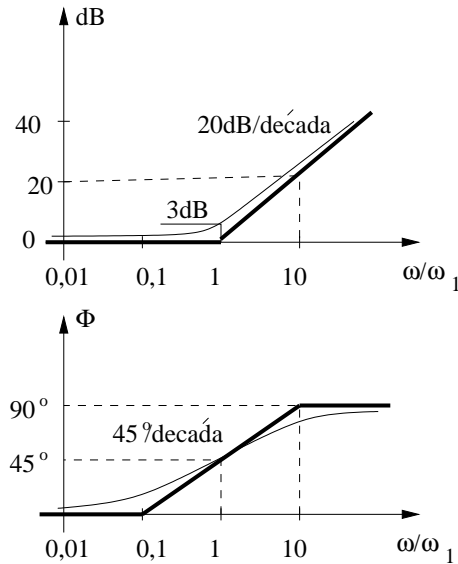


Figura 2.5: Representación asintótica de Bode del factor de primer orden  $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})$

Si se tratara de un polo el factor sería:  $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})^{-1}$  y las gráficas resultantes serían las mismas pero cambiando el signo de las pendientes como se muestra en la figura 2.6

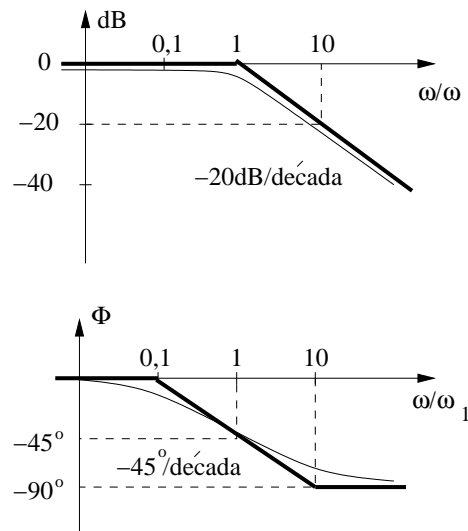


Figura 2.6: Representación asintótica de Bode del factor de primer orden  $(1 + \frac{j\omega}{\omega_1})^{-1}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- Módulo de  $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]$ :

$$20 \log \left| 1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2 \right| = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} =$$

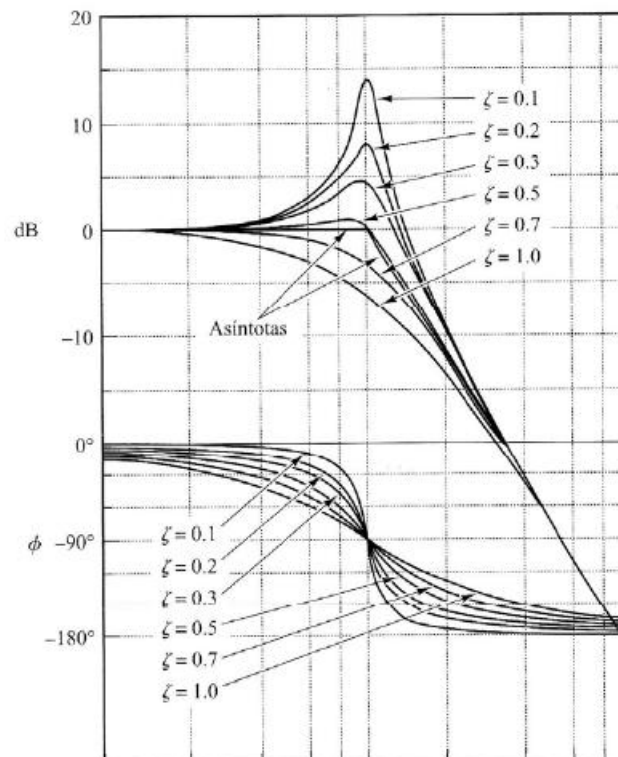
$$= \begin{cases} \omega < \frac{\omega_n}{10} \implies \simeq 20 \log 1 = 0dB & \text{Asíntota 1} \\ \omega_c = \omega_n \implies = 20 \log 2\xi = 6dB + \xi dB \\ \omega > 10\omega_n \implies \simeq 40 \log \omega - 40 \log \omega_n & \text{Asíntota 2} \end{cases} \quad (2.14)$$

La pendiente de la asíntota 2 es de 40dB/década como corresponde a dos ceros.

- Fase de  $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]$ :

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = \begin{cases} \omega < \frac{\omega_n}{10} \implies \simeq \tan^{-1}(0, 2\xi) \simeq 0^0 & \text{Asíntota 1} \\ \omega = \omega_n \implies = \tan^{-1} \infty = 90^0 \\ \omega > 10\omega_n \implies \simeq \tan^{-1}(-0, 2\xi) \simeq 180^0 & \text{Asíntota 2} \end{cases} \quad (2.15)$$

Si se tratara de dos polos complejos conjugados el factor sería:  $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{-1}$  y las gráficas resultantes serían las mismas pero cambiando el signo de las pendientes como se muestra en la figura 2.7



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El módulo del factor  $[1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{-1}$  es:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad (2.16)$$

El mayor sobreimpulso (pico de resonancia) ocurre cuando sea mínimo  $f(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$ .

Derivando e igualando a cero se obtiene la pulsación de resonancia:

$$\begin{aligned} 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) \left(\frac{-2\omega}{\omega_n^2}\right) + \frac{8\xi^2\omega}{\omega_n^2} &= 0 \\ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} &= 2\xi^2 \\ \omega_r &= \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esta frecuencia es real y positiva siempre que  $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ . Cuando  $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  la frecuencia de resonancia es imaginaria, es decir, no existe y tampoco habrá pico resonante. Por otro lado, si  $\xi \rightarrow 0$  la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  tiende a la frecuencia natural  $\omega_n$  y si  $\xi \rightarrow 0,707$  la frecuencia de resonancia tiende a cero. La frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  que aparece en la respuesta transitoria valía  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}$  que siempre es mayor que la frecuencia de resonancia.

Para  $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , sustituyendo el valor de la frecuencia de resonancia de la ecuación 2.17, en la ecuación 2.16, se obtiene el pico de resonancia  $M_r$ :

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.18)$$

Para  $\xi \geq 0,707$   $M_r = 1$  no existe pico de resonancia. Debe recordarse que con  $0,707 < \xi < 1$  la respuesta es oscilatoria, pero las oscilaciones están muy amortiguadas y apenas son perceptibles.

Si el coeficiente de amortiguamiento es nulo, (la frecuencia de resonancia  $\omega_r$  coincide con la frecuencia natural  $\omega_n$ ), el sobreimpulso es infinito y el sistema se destruiría. Por eso es tan importante estudiar la frecuencia natural de puentes y otras estructuras que pueden venirse abajo si son excitadas con esta frecuencia.

## 2.2. Trazado de diagramas de Bode

Sea la ganancia  $G(j\omega)$ , con  $\omega$  en rad/s:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

De todas formas, los valores que interesan para representar el factor cuadrático son los de  $\omega_n$  y  $\xi$  sabiendo que para valores por debajo de  $\xi = 0,5$  ya aparecen sobrepulsos importantes.

Lo primero que habría que hacer es poner los factores en la forma estudiada, es decir:

$$G(j\omega) = \frac{200 \cdot 5^2 (1 + \frac{j\omega}{5})^2}{2500j\omega(1 + \frac{j\omega}{1}) \left[ 1 + \frac{20}{2500}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{2500} \right]} = \frac{2(1 + \frac{j\omega}{5})^2}{j\omega(1 + \frac{j\omega}{1}) \left[ 1 + \frac{20}{2500}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{2500} \right]} \quad (2.21)$$

### ■ Módulo

Se calcula en dB:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 6dB + 40 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{5} \right| - 20 \log \omega - 20 \log |1 + j\omega| - 20 \log \left| 1 + \frac{20}{50} \left( \frac{j\omega}{50} \right) + \left( \frac{j\omega}{50} \right)^2 \right| \quad (2.22)$$

La representación de cada uno de estos sumandos por separado y el resultado de su suma algebraica se indica en la figura 2.8

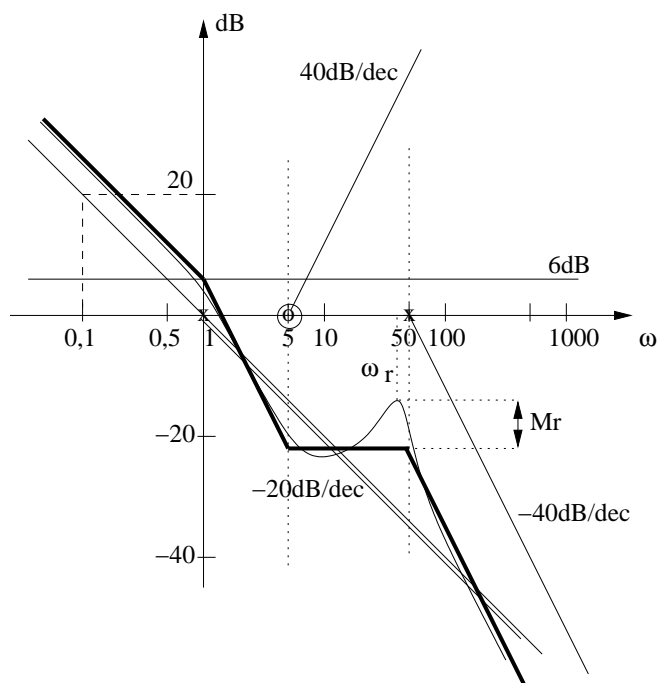


Figura 2.8: Representación asintótica de Bode del módulo del ejemplo

### ■ Fase

El valor de la fase es:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

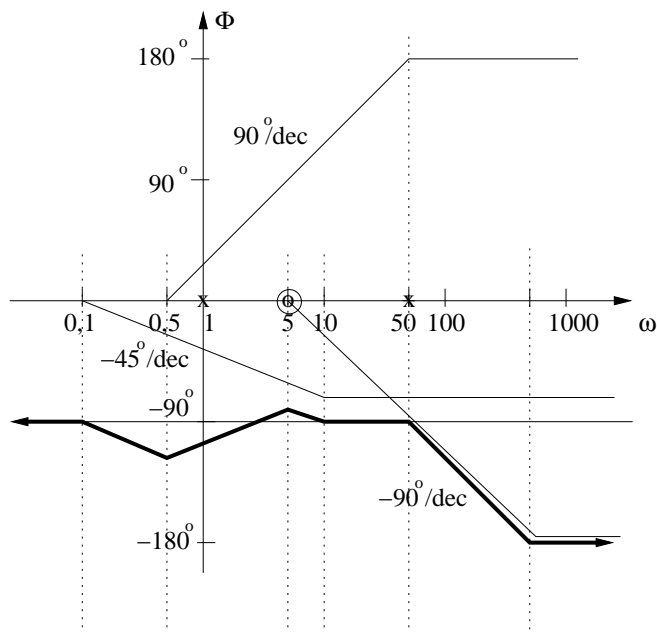
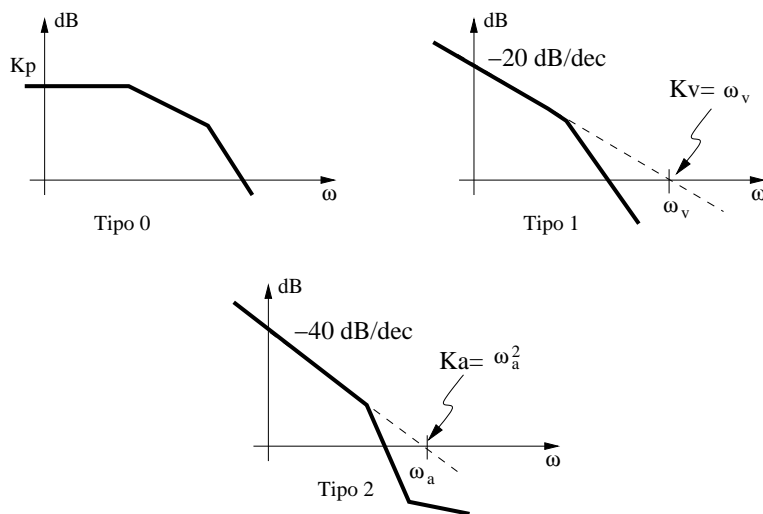


Figura 2.9: Representación asintótica de Bode de la fase del ejemplo

Observando el valor inicial de la pendiente en los diagramas de Bode puede deducirse el tipo del sistema. Si la gráfica del módulo comienza horizontal, el sistema es de tipo cero. Si comienza con una pendiente de  $-20$  dB/década es de tipo 1 y si la pendiente es de  $-40$  dB/década es de tipo 2. Los coeficientes estáticos de error de posición, de velocidad y de aceleración también se reflejan en los diagramas de Bode, según se indica en la figura 2.10



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

### ■ Módulo

1. Situar los polos y ceros indicando claramente si son sencillos o múltiples. En el caso de factores cuadráticos situar el valor de  $\omega_n$
2. Obtener el valor, o bien la pendiente, con la que parte la gráfica desde  $-\infty$  haciendo  $\omega \rightarrow 0$
3. Cada cero simple introduce una pendiente de  $+20$  dB/década. Si es múltiple de orden  $n$ , la pendiente será  $+20n$  dB/década
4. Cada polo simple introduce una pendiente de  $-20$  dB/década. Si es múltiple de orden  $n$ , la pendiente será  $-20n$  dB/década
5. Comprobar el valor, o la pendiente, con la que finaliza la gráfica haciendo  $\omega \rightarrow \infty$
6. Si la gráfica no empieza ni termina en valores concretos sino en pendientes es necesario determinar un punto por el que pase. Para ello, se toma un valor de  $\omega$  alejado al menos una década de cualquier polo o cero y se calcula el módulo de la función de transferencia de forma aproximada, despreciando los sumandos frente a los que sean 10 veces mayor.

### ■ Aplicación al módulo del ejemplo anterior

$$G(j\omega) = \frac{200(j\omega + 5)^2}{j\omega(j\omega + 1)[(j\omega)^2 + 20j\omega + 2500]} \quad (2.24)$$

El valor con el que se inicia la gráfica es:

$$G(0) = \frac{200 \cdot 5^2}{j\omega 2500} = \frac{2}{j\omega} \quad (2.25)$$

Al ser  $\omega = 0$ , el valor con el que se inicia es  $\infty$  pero conservo los términos en  $j\omega$  porque me permite saber que trae una pendiente de  $-20$  dB/década y una fase de  $-90^\circ$ .

Como no conozco un valor inicial desde el que partir, tomo un valor de  $\omega$  alejado al menos una década de todos los polos y ceros, por ejemplo  $\omega = 0,1$  rad/s y calculo de forma aproximada el módulo de la función de transferencia:

$$|G(j\omega)| \simeq \left| \frac{200 \cdot 5^2}{j0,1 \cdot 2500} \right| = 20 = 26 \text{ dB} \quad (2.26)$$

En la figura 2.8 puede comprobarse este valor.

A partir de este valor se van aplicando los puntos 3 y 4 y se termina comprobando el valor y la pendiente final.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

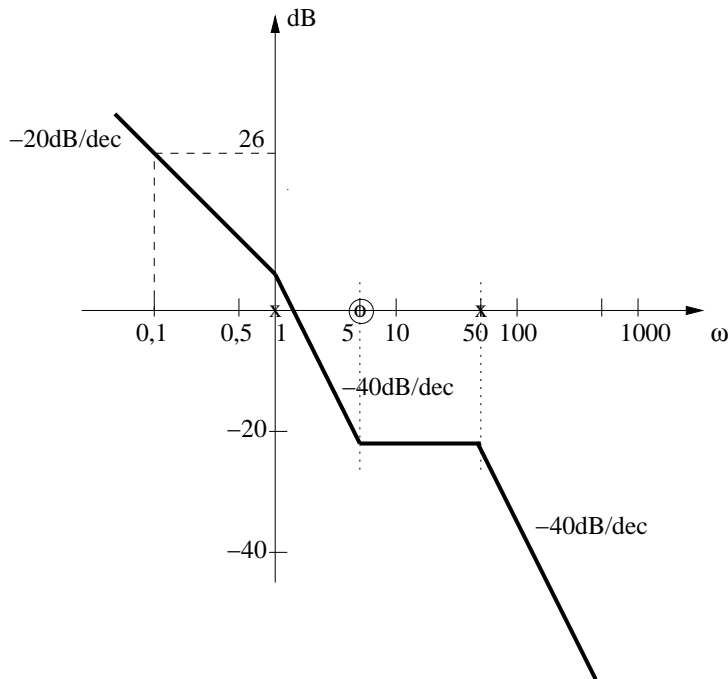


Figura 2.11: Representación rápida del módulo del ejemplo

#### ■ Fase

1. Situar los polos y ceros indicando claramente si son sencillos o múltiples. En el caso de factores cuadráticos situar el valor de  $\omega_n$
2. Marcar una década antes y otra después de cada uno de los polos y ceros.
3. Obtener el valor de la fase con la que parte la gráfica desde  $-\infty$  haciendo  $\omega \rightarrow 0$
4. Cada cero simple introduce una pendiente de  $+45^\circ/\text{década}$  durante dos décadas: la anterior y la siguiente al valor del cero. Si es múltiple de orden  $n$ , la pendiente será  $+45n^\circ/\text{década}$
5. Cada polo simple introduce una pendiente de  $-45^\circ/\text{década}$  durante dos décadas: la anterior y la siguiente al valor del polo. Si es múltiple de orden  $n$ , la pendiente será  $-45n^\circ/\text{década}$
6. Comprobar el valor, o la pendiente, con la que finaliza la gráfica haciendo  $\omega \rightarrow \infty$

#### ■ Aplicación a la fase del ejemplo anterior

$$G(j\omega) = \frac{200(j\omega + 5)^2}{\dots} \quad (2.28)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



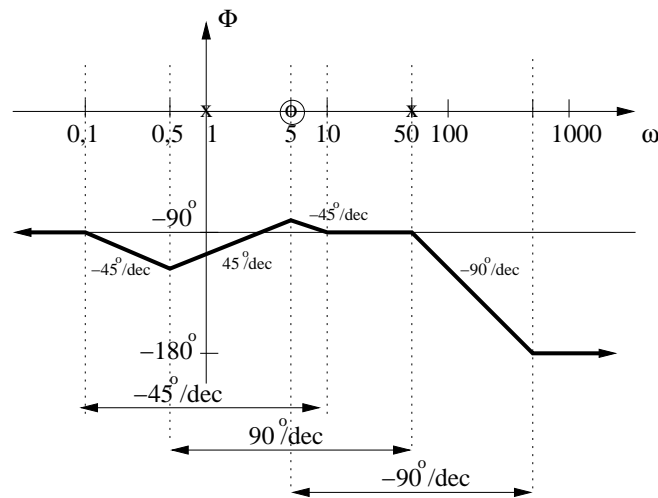


Figura 2.12: Representación rápida de la fase del ejemplo

Se sitúan los ceros y polos y se marcan las pendientes que introducen en sus dos décadas correspondientes.

El valor inicial de la fase es:

$$G(0) = \frac{200 \cdot 5^2}{j\omega 2500} = \frac{2}{j\omega} \quad (2.29)$$

por lo que la fase inicial es de  $-90^\circ$ .

A partir de ahí se introducen las pendientes correspondientes a cada tramo y se comprueba el valor final:

$$G(\infty) = \frac{200(j\omega)^2}{j\omega(j\omega)(j\omega)^2} = \frac{200}{(j\omega)^2} \quad (2.30)$$

La fase final es de  $-180^\circ$ .

Es importante notar que la expresión de la función de transferencia puede venir dada de dos formas diferentes:

$$G(s)H(s) = K_1 \frac{(s + \omega_{z1})(s + \omega_{z2}) \cdots}{(s + \omega_{p1})(s + \omega_{p2}) \cdots} \quad (2.31)$$

o bien:

$$G(s)H(s) = K_1 \frac{(\frac{s}{\omega_{z1}} + 1)(\frac{s}{\omega_{z2}} + 1) \cdots}{(\frac{s}{\omega_{p1}} + 1)(\frac{s}{\omega_{p2}} + 1) \cdots} \quad (2.32)$$

La ganancia  $K$  en baja frecuencia se calcula haciendo  $s \rightarrow 0$  por lo que en el primer caso:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

# Capítulo 3

## Compensación o diseño de PID

### 3.1. Problema 1

Un sistema, con realimentación unitaria, tiene una función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (3.1)$$

Para que se cumplan las especificaciones de respuesta transitoria:  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $\omega_n = 2$  rad/seg

- Diseñar un regulador PD real mediante el método de cancelación cero-polo.
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la bisectriz.

#### Solución

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.2)$$

y sustituyendo los valores de  $\xi$  y  $\omega_n$ :

$$s^2 + 2\sqrt{2}s + 4 = 0 \quad (3.3)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en:

$$s_{1,2} = -\sqrt{2} \pm j\sqrt{2} \quad (3.4)$$

El compensador PD introduce un cero y un polo y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (3.5)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Como se indica que el PD es real, tanto el cero  $\omega_z$  como el polo  $\omega_p$  del compensador serán reales. El cero del compensador  $\omega_z$  cancelará el polo de la función de transferencia sin compensar, es decir  $\omega_z = 1$ :

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s+\omega_p} \frac{1}{s(s+1)} = K_c \frac{1}{s(s+\omega_p)} \quad (3.7)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (3.8)$$

cuya ecuación característica es:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \quad (3.9)$$

o bien:

$$G_c(s)G(s)H(s) = -1 \quad (3.10)$$

Como los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, tendrán que cumplir la ecuación 3.10, es decir, que el módulo de  $G_c(s)G(s)H(s)$  sea la unidad (condición de amplitud) y su fase  $\pm 180^\circ$  (condición de fase).

En la figura 3.1 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-135^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 45^\circ \quad (3.11)$$

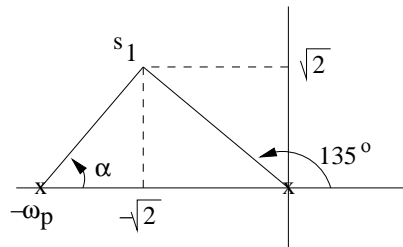


Figura 3.1: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de  $\omega_p$  será:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{\omega_p - \sqrt{2}} = 1 \\ \omega_p &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

El valor de  $K_c$  se obtiene de la condición de amplitud:

$$|G_c(s)G(s)H(s)| = 1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## b) Método de la bisectriz

Es un método que suele hacerse gráficamente pero aquí lo resolveremos analíticamente.

1.- Desde un polo deseado en lazo cerrado  $s_1 = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$  se traza la horizontal PA y la recta que lo une al origen PO, como se indica en la figura 3.2

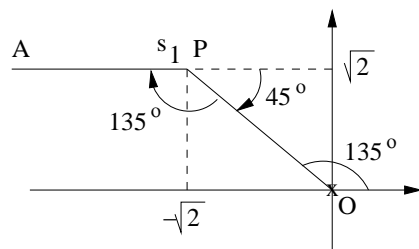


Figura 3.2: Ángulo del que hay que hallar la bisectriz

2.- Se traza la bisectriz PB y se hallan los ángulos de interés como se indica en la figura 3.3

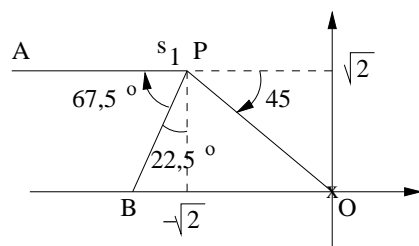


Figura 3.3: Bisectriz PB

3.- Se calcula la fase que ha de aportar el compensador

El polo en lazo cerrado  $s_1$  ha de cumplir la condición de fase, por lo que:

$$\angle G(s_1)H(s_1) + \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ \quad (3.15)$$

Es decir:

$$\angle \frac{1}{s_1(s_1 + 1)} + \phi = \pm 180^\circ \quad (3.16)$$

$$\angle \frac{1}{s_1(s_1 + 1)} = -135^\circ - \tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = -135^\circ - 106^\circ = -241^\circ \quad (3.17)$$

por lo que:

$$\phi = 241^\circ - 180^\circ = 61^\circ \quad (3.18)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

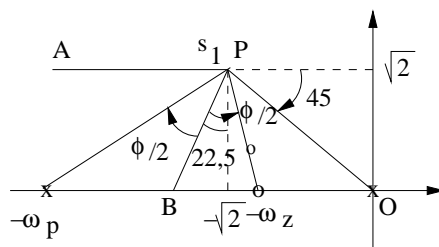


Figura 3.4: Situación del cero y del polo del compensador

5.- El polo del compensador está en:

$$\tan(22,5^\circ + 30,5^\circ) = \tan 53^\circ = \frac{\omega_p - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (3.19)$$

$$\omega_p = \sqrt{2} + \sqrt{2} \tan 53^\circ = 3,29 \quad (3.20)$$

y el cero en:

$$\tan(30,5^\circ - 22,5^\circ) = \tan 8^\circ = \frac{\sqrt{2} - \omega_z}{\sqrt{2}} \quad (3.21)$$

$$\omega_z = \sqrt{2} - \sqrt{2} \tan 8^\circ = 1,21 \quad (3.22)$$

6.- La ganancia del compensador se obtiene de la condición de módulo que ha de cumplir el polo  $s_1 = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$ :

$$\left| K_c \frac{s_1 + 1,21}{s_1 + 3,29} \frac{1}{s_1(s_1 + 1)} \right| = 1 \quad K_c = 1,8 \quad (3.23)$$

La función de transferencia del compensador es:

$$G_c(s) = 1,8 \frac{s + 1,21}{s + 3,29} \quad (3.24)$$

## 3.2. Problema 2

Un sistema, con realimentación unitaria, tiene una función de transferencia en lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)} \quad (3.25)$$

Para que se cumplan las especificaciones de respuesta transitoria:  $\xi = \frac{1}{2}$  y  $\omega_n = 5 \text{ rad/seg}$

- Diseñar un regulador PD real mediante el método de cancelación cero-polo.
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la bisectriz.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en las raíces de la ecuación anterior:

$$s_{1,2} = -2,5 \pm j2,5\sqrt{3} \quad (3.28)$$

También se podrían haber puesto directamente sin resolver la ecuación:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2,5 \pm j2,5\sqrt{3} \quad (3.29)$$

El compensador PD introduce un cero y un polo y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (3.30)$$

La ganancia de lazo con compensación será:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \frac{K}{s(s+3)} \quad (3.31)$$

En general, cuando el sistema esté compensado la ecuación característica (lazo cerrado) será:

$$1 + G(s)H(s)G_c(s) = 0 \quad \text{o bien} \quad G(s)H(s)G_c(s) = -1 \quad (3.32)$$

cuya representación sería, precisamente, el lugar de las raíces del sistema compensado en lazo cerrado. En un punto cualquiera  $s_1$  del lugar de las raíces se tendrá que cumplir la condición de fase:

$$\angle G(s_1)H(s_1)G_c(s_1) = 180^\circ \quad (3.33)$$

y la condición de módulo:

$$|G(s_1)H(s_1)G_c(s_1)| = 1 \quad (3.34)$$

La condición de módulo puede ponerse como:

$$|G(s_1)H(s_1)| \cdot |G_c(s_1)| = 1 \quad (3.35)$$

y normalmente se ajusta  $K$  para que  $|G(s_1)H(s_1)| = 1$  y así la condición que hay que imponer al compensador es  $|G_c(s_1)| = 1$ .

En nuestro caso el ajuste de  $K$  sería:

$$\left| \frac{K}{s_1(s_1+3)} \right| = \left| \frac{K}{(-2,5 + j2,5\sqrt{3})(-2,5 + j2,5\sqrt{3} + 3)} \right| = \frac{K}{21,8} = 1 \quad (3.36)$$

por lo que  $K = 21,8$

#### a) Cancelación cero-polo

Como se indica que el PD es real, tanto el cero  $\omega_z$  como el polo  $\omega_p$  del compensador serán reales. El cero del compensador  $\omega_z$  cancelará el polo de la función de transferencia sin

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

cuya ecuación característica es:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \quad (3.39)$$

o bien:

$$G_c(s)G(s)H(s) = -1 \quad (3.40)$$

Como los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, tendrán que cumplir la ecuación 3.130, es decir, que el módulo de  $G_c(s)G(s)H(s)$  sea la unidad (condición de amplitud) y su fase  $\pm 180^\circ$  (condición de fase).

En la figura 3.5 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-120^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 60^\circ \quad (3.41)$$

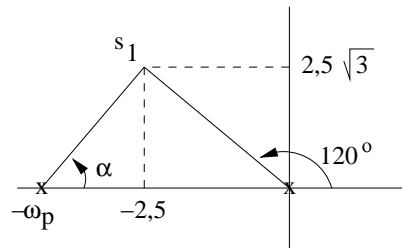


Figura 3.5: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de  $\omega_p$  será:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan 60^\circ = \frac{2,5\sqrt{3}}{\omega_p - 2,5} = \sqrt{3} \\ \omega_p &= 5 \end{aligned} \quad (3.42)$$

El valor de  $K_c$  se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación  $s_1$ , que puesto que se ha ajustado  $K$  para que  $|G(s)H(s)| = 1$  se traduce en:

$$\begin{aligned} |G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| &= |G_c(s_1)| = 1 \\ \left| K_c \frac{s_1 + 3}{s_1 + 5} \right| &= \frac{4,35K_c}{5} = 1 \quad K_c = 1,14 \end{aligned} \quad (3.43)$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = 1,14 \frac{s + 3}{s + 5} \quad (3.44)$$

### b) Método de la bisectriz

Es un método que suele hacerse gráficamente pero aquí lo resolveremos analíticamente.

1.- Desde un polo deseado en lazo cerrado  $s_1 = -2,5 + j2,5\sqrt{3}$  se traza la horizontal PA y la recta que lo une al origen PO, como se indica en la figura 3.6

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

2.- Se traza la bisectriz PB y se hallan los ángulos de interés como se indica en la figura 3.7

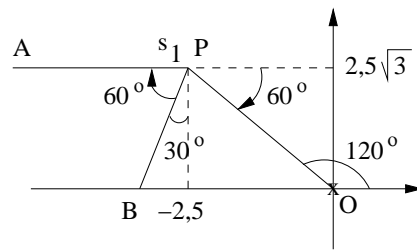


Figura 3.7: Bisectriz PB

3.- Se calcula la fase que ha de aportar el compensador  
El polo en lazo cerrado  $s_1$  ha de cumplir la condición de fase, por lo que:

$$\angle G(s_1)H(s_1) + \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ \quad (3.45)$$

Es decir:

$$\angle \frac{21,8}{s_1(s_1 + 3)} + \phi = \pm 180^\circ \quad (3.46)$$

$$\angle \frac{21,8}{s_1(s_1 + 3)} = -120^\circ - \tan^{-1} \frac{2,5\sqrt{3}}{0,5} = -120^\circ - 83,41^\circ = -203,41^\circ \quad (3.47)$$

por lo que:

$$\phi = 203,41^\circ - 180^\circ = 23,41^\circ \quad (3.48)$$

4.- A cada lado de la bisectriz, se trazan las rectas que forman con ella un ángulo de  $\phi/2 = 11,7^\circ$  como se indica en la figura 3.8

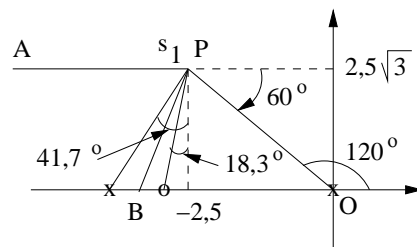


Figura 3.8: Situación del cero y del polo del compensador

5.- El polo del compensador está en:

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



$$\omega_z = 2,5 + 2,5\sqrt{3} \tan 18,3^\circ = 3,93 \text{ rad/s} \quad (3.52)$$

6.- La ganancia del compensador se obtiene de la condición de módulo que ha de cumplir el polo  $s_1 = -2,5 + j2,5\sqrt{3}$ :

$$\left| K_c \frac{s_1 + 3,93}{s_1 + 6,35} \frac{21,8}{s_1(s_1 + 3)} \right| = 1 \quad K_c = 1,26 \quad (3.53)$$

La función de transferencia del compensador es:

$$G_c(s) = 1,26 \frac{s + 3,93}{s + 6,35} \quad (3.54)$$

### 3.3. Problema 3

Un sistema con realimentación unitaria tiene una función de transferencia el lazo abierto:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)} \quad (3.55)$$

Para que se cumplan las especificaciones de respuesta transitoria:  $\xi = 0,4$  y  $\omega_n = 1,4$  rad/seg

- Diseñar un regulador PD real mediante el método de cancelación cero-polo.
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la vertical.
- Diseñar un regulador PD real mediante el método de la bisectriz.
- Justificar cual es el mejor método.

#### Solución

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.56)$$

y sustituyendo los valores de  $\xi$  y  $\omega_n$ :

$$s^2 + 1,12s + 1,96 = 0 \quad (3.57)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en:

$$s_{1,2} = -0,56 \pm j1,28 \quad (3.58)$$

El compensador PD introduce un cero y un polo y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (3.59)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

### a) Cancelación cero-polo

Como se indica que el PD es real, tanto el cero  $\omega_z$  como el polo  $\omega_p$  del compensador serán reales. El cero del compensador  $\omega_z$  cancelará el primer polo, que no esté en el eje imaginario, de la función de transferencia sin compensar, es decir  $\omega_z = 1$ :

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s+1}{s+\omega_p} \frac{5,17}{s(s+1)(s+3)} = K_c \frac{5,17}{s(s+3)(s+\omega_p)} \quad (3.62)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (3.63)$$

cuya ecuación característica es:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \quad (3.64)$$

o bien:

$$G_c(s)G(s)H(s) = -1 \quad (3.65)$$

Como los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, tendrán que cumplir la ecuación 3.130, es decir, que el módulo de  $G_c(s)G(s)H(s)$  sea la unidad (condición de amplitud) y su fase  $\pm 180^\circ$  (condición de fase).

En la figura 3.9 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-114^\circ - 28^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 38^\circ \quad (3.66)$$

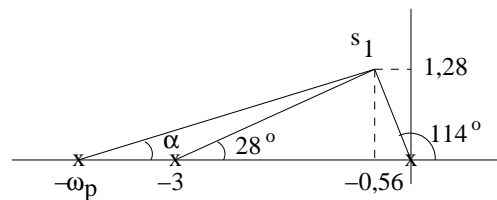


Figura 3.9: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de  $\omega_p$  será:

$$\tan \alpha = \tan 38^\circ = \frac{1,28}{\omega_p - 0,56} = 0,78 \quad (3.67)$$

$$\omega_p = 2,2 \text{ rad/s}$$

El valor de  $K_c$  se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación  $s_1$ :

$$|G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

b) **Método de la vertical** Consiste en colocar el cero del compensador en la vertical del polo en lazo cerrado  $s_1$  y sobre el eje real, es decir,  $\omega_z = 0,56$ .

En la figura 3.10 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-114^\circ + 90^\circ - 71^\circ - 28^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 57^\circ \quad (3.70)$$

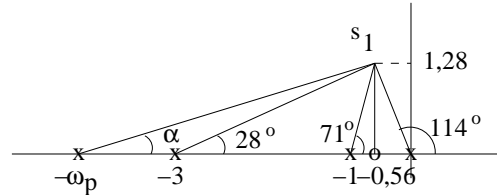


Figura 3.10: Condición de fase del polo con compensador PD según el criterio de la vertical

El valor de  $\omega_p$  será:

$$\tan \alpha = \tan 57^\circ = \frac{1,28}{\omega_p - 0,56} = 1,53 \quad (3.71)$$

$$\omega_p = 1,4 \text{ rad/s}$$

El valor de  $K_c$  se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación  $s_1$ :

$$|G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

$$\left| K_c \frac{5,17(s_1+0,56)}{s_1(s_1+1)(s_1+3)(s_1+\omega_p)} \right| = \left| K_c \frac{5,17j1,28}{(-0,56+j1,28)(-0,56+j1,28+1)(-0,56+j1,28+3)(-0,56+j1,28+1,4)} \right| = \frac{K_c 5,17}{6,31} = 1$$

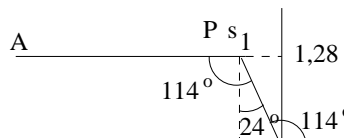
$$K_c = 1,22 \quad (3.72)$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = 1,22 \frac{s + 0,56}{s + 1,4} \quad (3.73)$$

**b) Método de la bisectriz**

1.- Desde un polo deseado en lazo cerrado  $s_1 = -0,56 + j1,28$  se traza la horizontal PA y la recta que lo une al origen PO, como se indica en la figura 3.11



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



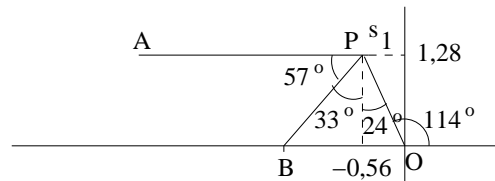


Figura 3.12: Bisectriz PB

3.- Se calcula la fase que ha de aportar el compensador

El polo en lazo cerrado  $s_1$  ha de cumplir la condición de fase, por lo que:

$$\angle G(s_1)H(s_1) + \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ \quad (3.74)$$

Es decir:

$$\angle \frac{5,17}{s_1(s_1+1)(s_1+3)} + \phi = \pm 180^\circ \quad (3.75)$$

$$\angle \frac{5,17}{s_1(s_1+1)(s_1+3)} = -114^\circ - \tan^{-1} \frac{1,28}{1-0,56} - \tan^{-1} \frac{1,28}{3-0,56} = -212,68^\circ \quad (3.76)$$

por lo que:

$$\phi = 212,68^\circ - 180^\circ = 32,68^\circ \quad (3.77)$$

4.- A cada lado de la bisectriz, se trazan las rectas que forman con ella un ángulo de  $\phi/2 = 16,34^\circ$  como se indica en la figura 3.13

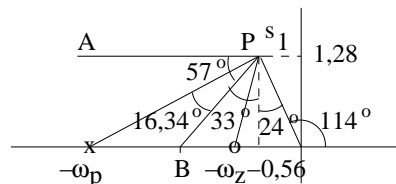


Figura 3.13: Situación del cero y del polo del compensador

5.- El polo del compensador está en:

$$\tan(16,34^\circ + 33^\circ) = \tan 49,34^\circ = \frac{\omega_p - 0,56}{1,28} \quad (3.78)$$

$$\omega_p = 0,56 + 1,28 \tan 49,34^\circ = 2,05 \text{ rad/s} \quad (3.79)$$

y el cero en:

$$\tan(33^\circ - 16,34^\circ) = \tan 16,26^\circ = \frac{\omega_z - 0,56}{1,28} \quad (3.80)$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

La función de transferencia del compensador es:

$$G_c(s) = 1,45 \frac{s + 0,93}{s + 2,05} \quad (3.83)$$

d) **Comparación de métodos** En este caso, con el que se obtiene menor ganancia es con el de la vertical y eso conlleva ventajas económicas, de menor potencia y componentes menores.

Para comparar el ancho de banda, sobreimpulso, velocidad, etc se podría obtener la respuesta al escalón y comparar los resultados.

### 3.4. Problema 4

La función de transferencia de la planta  $G(s)$ , en un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2,5)(s^2 + 2s + 1,75)} \quad (3.84)$$

Diseñar un regulador real  $G_R(s)$  para que el sistema cumpla las siguientes especificaciones:

Tiempo de establecimiento al 2%: 3 seg.

Sobreimpulso máximo: 20,78%.

#### Solución

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,2078 = 1,57 \quad \xi = 0,446 \quad (3.85)$$

y del tiempo de establecimiento se obtiene la frecuencia natural:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 3 = \frac{4}{0,446\omega_n} \quad \omega_n = 2,98 \text{ rad/s} \quad (3.86)$$

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.87)$$

y sustituyendo los valores de  $\xi$  y  $\omega_n$ :

$$s^2 + 2,658s + 8,88 = 0 \quad (3.88)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

La ganancia de lazo con compensación será:

$$G(s)H(s)G_R(s) = \frac{K_c}{(s + \omega_p)(s + 2,5)} \quad (3.91)$$

En la figura 3.14 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-66,75^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 113,75^\circ \simeq 114^\circ \quad (3.92)$$

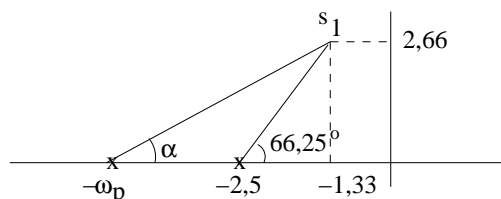


Figura 3.14: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El hecho de que  $\alpha$  salga mayor de  $90^\circ$  indica que el polo del compensador está situado a la derecha de  $-1,33$ , como se indica en la figura 3.15

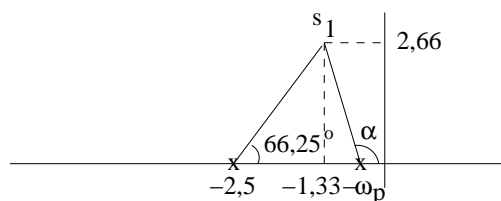


Figura 3.15: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de  $\omega_p$  será:

$$\begin{aligned} \tan(180^\circ - \alpha) &= \tan(180^\circ - 114^\circ) = \frac{2,66}{1,33 - \omega_p} = 2,27 \\ \omega_p &= 0,15 \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (3.93)$$

El valor de  $K_c$  se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación  $s_1$ :

$$\begin{aligned} |G_R(s_1)G(s_1)H(s_1)| &= 1 \\ \left| \frac{K_c}{(s_1 + \omega_p)(s_1 + 2,5)} \right| &= \left| \frac{K_c}{(s_1 + 0,15)(s_1 + 2,5)} \right| = \frac{K_c}{8,45} = 1 \end{aligned} \quad (3.94)$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

### 3.5. Problema 5

Una planta con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4} \quad (3.96)$$

se realimenta unitariamente por lo que su lugar de las raíces se encuentra sobre los ejes del plano complejo. Mediante un regulador real se desea que cumpla las siguientes especificaciones: coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0,55$  y tiempo de pico  $t_p = 2,1$  seg.

- Diseñar el regulador que produzca la respuesta temporal deseada.
- Justificar razonadamente el regulador y el método de diseño utilizado.

#### Solución

En lazo abierto y sin compensación, los polos están situados en  $s_1 = -2$  y  $s_2 = 2$  ya que:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4} = \frac{1}{(s + 2)(s - 2)} \quad (3.97)$$

Cuando se realimenta unitariamente los polos evolucionan por el eje real hasta encontrarse en el origen y después emigran por el eje imaginario hasta  $\pm \infty$ .

Las especificaciones demandadas son:  $\xi = 0,55$  y  $t_p = 2,1$  por lo que:

$$t_p = 2,1 \text{ s} = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \quad \omega_n = 1,79 \text{ rad/s} \quad (3.98)$$

La ecuación característica del sistema compensado en lazo cerrado tendrá que ser:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.99)$$

es decir:

$$s^2 + 1,97s + 3,21 = 0 \quad (3.100)$$

Los polos en lazo cerrado del sistema compensado deberán estar en:

$$s_{1,2} = 0,985 \pm j1,496 \quad (3.101)$$

Se emplea un compensador PD que cancele el polo situado en el semiplano derecho por lo que su función de transferencia será:

$$G_c(s) = K_c \frac{s - 2}{s + \omega_p} \quad (3.102)$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

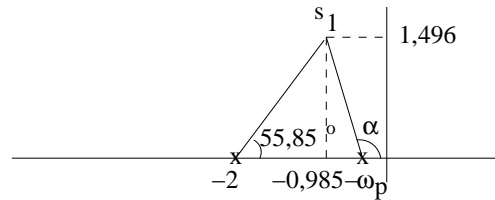


Figura 3.16: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

El valor de  $\omega_p$  será:

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \tan(180^\circ - 124,15^\circ) = \frac{1,496}{0,985 - \omega_p} = 1,47 \quad (3.105)$$

$$\omega_p = 0 \text{ rad/s}$$

El valor de  $K_c$  se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación  $s_1$ :

$$|G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

$$\left| \frac{K_c}{(s_1 + \omega_p)(s_1 + 2)} \right| = \left| \frac{K_c}{s_1(s_1 + 2)} \right| = \frac{K_c}{3,24} = 1 \quad (3.106)$$

$$K_c = 3,24$$

La función de transferencia del compensador será:

$$G_c(s) = 3,24 \frac{s - 2}{s} \quad (3.107)$$

### b) Regulador y método utilizado

El regulador es del tipo PD y se ha empleado el método de cancelación. En la práctica cancelar un polo en el semiplano derecho no da buenos resultados ya que es prácticamente imposible coincidir con el polo realmente y además se puede desajustar con el tiempo.

## 3.6. Problema 6

Un sistema de control con realimentación unitaria presenta una función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{1}{(s + 2)(s - 3)} \quad (3.108)$$

Con objeto de estabilizar el sistema y que la respuesta ante una entrada escalón cumpla las especificaciones:

$$M_p = 20,78\% \text{ y } t_s|_{2\%} = 3s \quad (3.109)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,2078 = 1,57 \quad \xi = 0,446 \quad (3.110)$$

y del tiempo de establecimiento se obtiene la frecuencia natural:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 3 = \frac{4}{0,446\omega_n} \quad \omega_n = 2,98 \text{ rad/s} \quad (3.111)$$

En lazo cerrado la ecuación característica será:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.112)$$

y sustituyendo los valores de  $\xi$  y  $\omega_n$ :

$$s^2 + 2,658s + 8,88 = 0 \quad (3.113)$$

por lo que los polos en lazo cerrado han de estar en:

$$s_{1,2} = -1,33 \pm j2,66 \quad (3.114)$$

El compensador PD introduce un cero y un polo y su función de transferencia es:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \quad (3.115)$$

La ganancia de lazo con compensación será:

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s + \omega_z}{s + \omega_p} \frac{1}{(s + 2)(s - 3)} \quad (3.116)$$

#### a) Método de la bisectriz

1.- Desde un polo deseado en lazo cerrado  $s_1 = -1,33 + j2,66$  se traza la horizontal PA y la recta que lo une al origen PO, como se indica en la figura 3.17

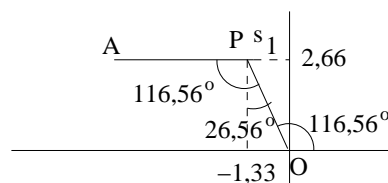


Figura 3.17: Ángulo del que hay que hallar la bisectriz

2.- Se traza la bisectriz PB y se hallan los ángulos de interés como se indica en la figura 3.18

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

3.- Se calcula la fase que ha de aportar el compensador

El polo en lazo cerrado  $s_1$  ha de cumplir la condición de fase, por lo que:

$$\angle G(s_1)H(s_1) + \angle G_c(s_1) = \pm 180^\circ \quad (3.117)$$

Es decir:

$$\angle \frac{1}{(s_1 + 2)(s_1 - 3)} + \phi = \pm 180^\circ \quad (3.118)$$

$$\angle \frac{1}{(s_1 + 2)(s_1 - 3)} = -\tan^{-1} \frac{2,66}{2 - 1,33} - (180^\circ - \tan^{-1} \frac{2,66}{3 + 1,33}) = -75,86^\circ - 148,43^\circ = -224,29^\circ \quad (3.119)$$

por lo que:

$$\phi = 224,29^\circ - 180^\circ = 44,29^\circ \quad (3.120)$$

4.- A cada lado de la bisectriz, se trazan las rectas que forman con ella un ángulo de  $\phi/2 = 22,14^\circ$  como se indica en la figura 3.19

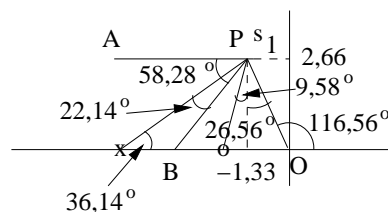


Figura 3.19: Situación del cero y del polo del compensador

5.- El polo del compensador está en:

$$\tan 36,14^\circ = \frac{2,66}{\omega_p - 1,33} \quad (3.121)$$

$$\omega_p = 1,33 + \frac{2,66}{\tan 36,14^\circ} = 4,97 \text{ rad/s} \quad (3.122)$$

y el cero en:

$$\tan 9,58^\circ = \frac{\omega_z - 1,33}{2,66} \quad (3.123)$$

$$\omega_z = 2,66 \tan 9,58^\circ + 1,33 = 1,78 \text{ rad/s} \quad (3.124)$$

6.- La ganancia del compensador se obtiene de la condición de módulo que ha de cumplir el polo  $s_1 = -1,33 + j2,66$ :

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

El cero del compensador  $\omega_z$  cancelará el polo del semiplano derecho, es decir  $\omega_z = 3$ :

$$G(s)H(s)G_c(s) = K_c \frac{s-3}{s+\omega_p} \frac{1}{(s+2)(s-3)} = \frac{K_c}{(s+2)(s+\omega_p)} \quad (3.127)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (3.128)$$

cuya ecuación característica es:

$$1 + G_c(s)G(s)H(s) = 0 \quad (3.129)$$

o bien:

$$G_c(s)G(s)H(s) = -1 \quad (3.130)$$

Como los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica, tendrán que cumplir la ecuación 3.130, es decir, que el módulo de  $G_c(s)G(s)H(s)$  sea la unidad (condición de amplitud) y su fase  $\pm 180^\circ$  (condición de fase).

En la figura 3.20 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-75,86^\circ - \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 104,14^\circ \quad (3.131)$$

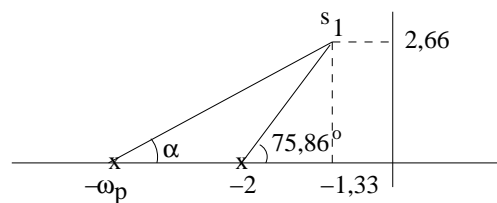


Figura 3.20: Condición de fase del polo con compensador PD en lazo cerrado

Como  $\alpha > 90^\circ$  el polo estará situado a la derecha de  $-1,33$ .

El valor de  $\omega_p$  será:

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \tan 75,86^\circ = \frac{2,66}{\omega_p + 1,33} = 3,97 \quad (3.132)$$

$$\omega_p = 0,66 \text{ rad/s}$$

El valor de  $K_c$  se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación  $s_1$ :

$$|G_c(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

$$\left| \frac{K_c}{(s_1 + \omega_p)(s_1 + 2)} \right| = \left| \frac{K_c}{(-1,33 + j2,66 + 0,66)(-1,33 + j2,66 + 2)} \right| = \frac{K_c}{7,54} = 1 \quad (3.133)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

### 3.7. Problema 7

Dado un sistema cuyo lugar de las raíces aparece en la figura 3.21:

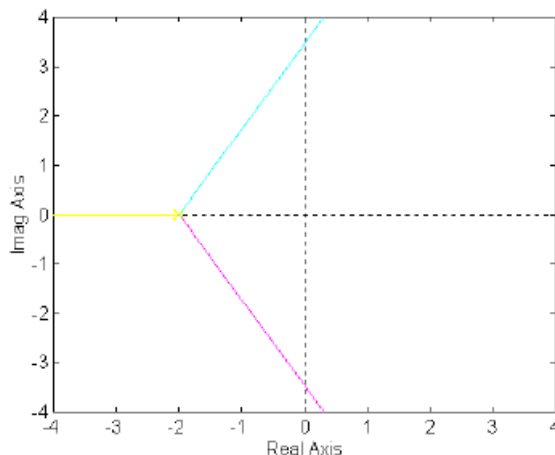


Figura 3.21: Lugar de las raíces

Se sabe que dos de sus polos en lazo cerrado se encuentran sobre el eje imaginario. Diseñar un regulador PDI para que se cumplan las siguientes especificaciones:

$$M_p(\%) = 12,3\% \quad t_s(2\%) = 2s \quad \text{Error estático de posición} \leq 5\% \quad (3.135)$$

#### Solución

Si el lugar de las raíces es como el indicado en la figura 3.21 es que tiene tres polos y como arranca de  $s=-2$  la ganancia de lazo abierto será de la forma:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+2)^3} \quad (3.136)$$

Si en lazo cerrado sin compensar tiene dos de sus raíces en el eje imaginario alguna fila del criterio de Routh ha de ser nula y entonces la fila auxiliar proporciona las raíces en el eje imaginario. La ecuación característica es:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (s+2)^3 + K = s^3 + 6s^2 + 12s + 8 + K = 0 \quad (3.137)$$

y el criterio de Routh sería:

$$s^3 \quad | \quad 1 \quad \quad \quad 12$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

y las dos raíces imaginarias estarán en:

$$6s^2 + 72 = 0 \quad s_{1,2} = \pm j2\sqrt{3} \quad (3.139)$$

y la raíz real:

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 72 = (s^2 + 12)(s + 6) \quad s_3 = -6 \quad (3.140)$$

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,123 = -2,09 \quad \xi = 0,553 \quad (3.141)$$

y del tiempo de establecimiento se obtiene la frecuencia natural:

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 2 = \frac{4}{0,553\omega_n} \quad \omega_n = 3,6 \text{ rad/s} \quad (3.142)$$

En lazo cerrado la ecuación característica del sistema compensado tendrá que ser:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.143)$$

y sustituyendo los valores de  $\xi$  y  $\omega_n$ :

$$s^2 + 4s + 13 = 0 \quad (3.144)$$

por lo que los polos en lazo cerrado del sistema compensado han de estar en:

$$s_{1,2} = -2 \pm j3 \quad (3.145)$$

Estos polos no pertenecen al lugar de las raíces sin compensar.

Partimos de un compensador PD por adelante de fase ideal. La función de transferencia sería:

$$G_{PD}(s) = K_D(s + \omega_{zd}) \quad (3.146)$$

En la figura 3.22 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-3 \cdot 90^\circ + \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 90^\circ \quad (3.147)$$

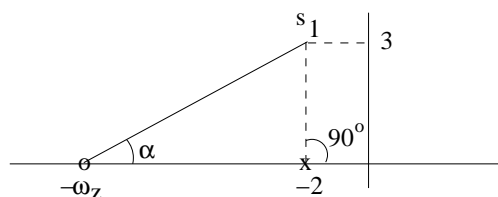


Figura 3.22: Condición de fase del polo con compensador PD ideal en lazo cerrado

El valor de  $\omega_{zd}$  sería  $\omega_{zd} = 2$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

La función de transferencia de la ganancia de lazo del sistema compensado será:

$$G_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{27}{(s+2)^2} \quad (3.149)$$

Como el error estático de posición es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \leq 0,05 \quad K_p \geq 19 \quad (3.150)$$

y en nuestro caso:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{27}{4} = 6,75 < 19 \quad (3.151)$$

por lo que el regulador no cumple todas las especificaciones dadas.

Se añade en cascada un nuevo compensador PI, cuya función de transferencia es:

$$G_{PI}(s) = K_I \frac{s + \omega_{zi}}{s + \frac{\omega_{zi}}{\beta}} \quad (3.152)$$

Donde:

$$\beta = \frac{K_{\text{especificado}}}{K_p} = \frac{19}{6,75} = 2,8148 \quad (3.153)$$

El polo es dominante respecto al cero al ser  $\beta$  veces más pequeño. El cero se suele colocar una década por debajo del primer polo, por ejemplo, en  $\omega_{zi} = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ rad/s}$  y el polo en  $\frac{\omega_{zi}}{\beta} = 0,071 \text{ rad/s}$ . La condición de módulo se calcula teniendo en cuenta que el módulo de  $G_{PD}(s)G(s)H(s)$  ya se había conseguido que fuera la unidad por lo que la condición completa se seguiría cumpliendo si:

$$\left| K_I \frac{s_1 + 0,2}{s_1 + 0,071} \right| = 1 \quad (3.154)$$

y como  $s_1 = -2 + j3 \gg 0,2 \gg 0,071$  entonces  $K_I = 1$ .

Si el retardo de fase introducido está entre  $0^\circ$  y  $5^\circ$  los polos no estarán lejos de los deseados  $s_{1,2}$ . En este caso el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ < \angle \frac{s_1 + 0,2}{s_1 + 0,071} = -1,77^\circ < 0^\circ \quad (3.155)$$

por lo que la función de transferencia del compensador PI será:

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0,2}{s + 0,071} \quad (3.156)$$

La ganancia de lazo total será:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

### 3.8. Problema 8

Se desea que el sistema con realimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+5)} \quad (3.159)$$

cuyo lugar de las raíces aparece en la figura 3.23:

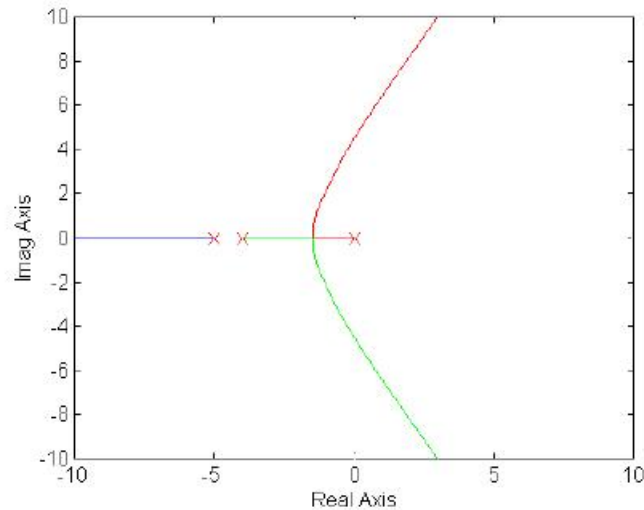


Figura 3.23: Lugar de las raíces sin compensar

cumpla las siguientes especificaciones:

$$M_p(\%) = 9,5\% \quad t_s(2\%) = 2s \quad \text{Error estático de velocidad} \leq 1/3 \quad (3.160)$$

Para tal fin, se diseñará un regulador PID en dos etapas:

- 1.- Un regulador PD ideal para cumplir las especificaciones del régimen transitorio.
- 2.- Un regulador PI modificado para cumplir las especificaciones de régimen permanente.

El regulador PID buscado será la asociación en cascada de los dos reguladores diseñados anteriormente.

Se pide:

- a) Función de transferencia del regulador PD ideal.
- b) Sin representar el nuevo lugar de las raíces, obtener la función de transferencia del regulador PI modificado.

#### Solución

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Los polos dominantes en lazo cerrado del sistema compensado han de estar en:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2 \pm j2,67 \quad (3.163)$$

Estos polos no pertenecen al lugar de las raíces sin compensar.

**a) Regulador PD ideal**

La función de transferencia será:

$$G_{PD}(s) = K_D(s + \omega_{zd}) \quad (3.164)$$

En la figura 3.24 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase:

$$-41,67^\circ - 53,16^\circ - 126,83^\circ + \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 41,66^\circ \quad (3.165)$$

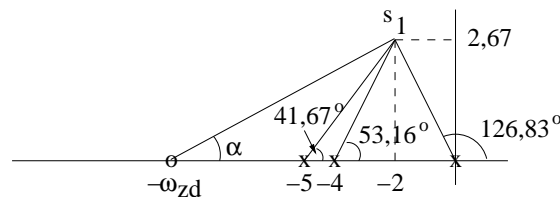


Figura 3.24: Condición de fase del polo con compensador PD ideal en lazo cerrado

El valor de  $\omega_{zd}$  sería:

$$\tan 41,66^\circ = \frac{2,67}{\omega_{zd} - 2} \quad \omega_{zd} \simeq -5 \text{ rad/s} \quad (3.166)$$

El valor de  $K_D$  se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación  $s_1 = -2 + j2,67$ :

$$|G_{PD}(s_1)G(s_1)H(s_1)| = 1$$

$$\left| K_D(s_1 + 5) \frac{1}{s_1(s_1+4)(s_1+5)} \right| = \left| \frac{K_D}{s_1(s_1+4)} \right| = \frac{K_D}{11,1289} = 1 \quad (3.167)$$

$$K_D = 11,1289$$

La función de transferencia de la ganancia de lazo del sistema compensado con el PD ideal será:

$$G_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{11,1289}{s(s+4)} \quad (3.168)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



por lo que el regulador PD no cumple todas las especificaciones dadas.

### b) Regulador PI modificado

Se añade en cascada un nuevo compensador PI, cuya función de transferencia es:

$$G_{PI}(s) = K_I \frac{s + \omega_{zi}}{s + \frac{\omega_{zi}}{\beta}} \quad (3.171)$$

Donde:

$$\beta = \frac{K_{\text{especificado}}}{K_v} = \frac{3}{2,78} = 1,078 \quad (3.172)$$

El polo es dominante respecto al cero al ser  $\beta$  veces más pequeño. El cero se suele colocar una década por debajo del primer polo, por ejemplo, en  $\omega_{zi} = 4 \cdot 0,1 = 0,4 \text{ rad/s}$  y el polo en  $\frac{\omega_{zi}}{\beta} = 0,371 \text{ rad/s}$ . La condición de módulo se calcula teniendo en cuenta que el módulo de  $G_{PD}(s)G(s)H(s)$  ya se había conseguido que fuera la unidad por lo que la condición completa se seguiría cumpliendo si:

$$\left| K_I \frac{s_1 + 0,4}{s_1 + 0,371} \right| = \frac{K_I}{0,9952} = 1 \quad K_I \simeq 1 \quad (3.173)$$

Si el retardo de fase introducido está entre  $0^\circ$  y  $5^\circ$  los polos no estarán lejos de los desados  $s_{1,2}$ . En este caso el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ < \angle \frac{s_1 + 0,4}{s_1 + 0,371} = -0,4557^\circ < 0^\circ \quad (3.174)$$

por lo que la función de transferencia del compensador PI será:

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0,4}{s + 0,371} \quad (3.175)$$

La ganancia de lazo total será:

$$G_{PDI}H(s) = G_{PD}(s)G_{PI}(s)G(s)H(s) = \frac{11,1289(s+5)(s+0,4)}{s(s+4)(s+5)(s+0,371)} \quad (3.176)$$

y el coeficiente de error de velocidad será:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{PDI}(s)H(s) = \frac{11,1289 \cdot 5 \cdot 0,4}{4 \cdot 5 \cdot 0,371} = 3 \quad (3.177)$$

con lo que se cumplen todas las especificaciones.

## 3.9. Problema 9

Diseñar un regulador PI modificado para que el sistema con realimentación unitaria:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

## Solución

Con el valor del sobreimpulso se obtiene el coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} - \frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \ln 0,2 = -1,61 \quad \xi = 0,4559 \quad (3.180)$$

La ecuación característica es  $1 + G(s)H(s) = 0$  que conduce a:

$$1 + \frac{K}{s(s+2)} = 0 \quad s^2 + 2s + K = 0 \quad (3.181)$$

Identificando con:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.182)$$

y teniendo en cuenta que  $\xi = 0,4559$  resulta:

$$\begin{aligned} 2\xi\omega_n &= 2 & \omega_n &= 2,2 \text{ rad/s} \\ K &= \omega_n^2 = 4,84 \end{aligned} \quad (3.183)$$

Los polos dominantes en lazo cerrado del sistema compensado han de estar en:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1 \pm j1,95 \quad (3.184)$$

El error en régimen permanente ante una entrada rampa es el error de velocidad que sin compensar vale:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= 1/K_v \\ K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+2)} = \frac{K}{2} = 2,42 \end{aligned} \quad (3.185)$$

La función de transferencia del regulador PI es:

$$G_{PI}(s) = K_I \frac{s + \omega_z}{s + \frac{\omega_z}{\beta}} \quad (3.186)$$

Donde:

$$\beta = \frac{K_{\text{especificado}}}{K_v} \quad (3.187)$$

El error en régimen permanente ante una entrada rampa, del sistema compensado, es el error de velocidad que ha de valer  $e_{ss} = 1/K_{\text{especificado}} \leq 0,05$ , es decir,  $K_{\text{especificado}} \geq 20$ , por lo tanto:

$$\beta = \frac{20}{2,42} = 8,26 \quad (3.188)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El cero se toma una década por debajo del polo situado en  $2 \text{ rad/s } \omega_z = 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ rad/s}$  y el polo en  $\frac{\omega_z}{\beta} = \frac{0,2}{8,26} = 0,024 \text{ rad/s}$ . De la condición de módulo se calcula  $K_I$ :

$$\left| K_I 4,84 \frac{s_1 + 0,2}{s_1(s_1 + 2)(s_1 + 0,024)} \right|_{s_1 = -1 + j1,95} = \frac{10,2K_I}{10,5} = 1 \quad K_I = \frac{10,5}{10,2} = 1,03 > 1 \quad (3.191)$$

Puede tomarse  $K_I \simeq 1$ .

Si el retardo de fase introducido está entre  $0^\circ$  y  $5^\circ$  los polos no estarán lejos de los desados  $s_{1,2}$ . En este caso el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ < \frac{s_1 + 0,2}{s_1 + 0,024} = -4,3^\circ < 0^\circ \quad (3.192)$$

por lo que la función de transferencia del compensador PI será:

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0,2}{s + 0,024} \quad (3.193)$$

### 3.10. Problema 10

Dado el sistema con realimentación unitaria:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)} \quad (3.194)$$

diseñar un regulador PI para que se cumplan las siguientes especificaciones:

Polos dominantes con  $\xi = 0,5$

Error en régimen permanente ante una entrada  $r(t) = tu(t)$  menor o igual que  $0,4$

#### Solución

Sin compensar, la ecuación característica es  $1 + G(s)H(s) = 0$  que conduce a:

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+3)} = 0 \quad s(s+1)(s+3) + K = 0 \quad s^3 + 4s^2 + 3s + K = 0 \quad (3.195)$$

Habría que dibujarse el lugar geométrico de esta ecuación y ver que ganancia  $K$  le corresponde a  $\xi = 0,5$  teniendo en cuenta que  $\cos\beta = \xi = 0,5$   $\beta = 60^\circ$ , como se indica en la figura 3.25.

$\xi=0,5$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

En este caso también se puede hacer analíticamente. El lugar geométrico con  $\gamma = 180^\circ - \beta = C^{te} = 120^\circ$  tiene por ecuación  $s = -\sigma + j\sigma\sqrt{3}$ . El punto de corte con el lugar geométrico se encontrará resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} s^3 + 4s^2 + 3s + K &= 0 \\ s &= -\sigma + j\sigma\sqrt{3} \end{aligned} \quad (3.196)$$

o lo que es lo mismo:

$$(-\sigma + j\sigma\sqrt{3})^3 + 4(-\sigma + j\sigma\sqrt{3})^2 + 3(-\sigma + j\sigma\sqrt{3}) + K = 0 \quad (3.197)$$

y desarrollando e igualando la parte real y la parte imaginaria a cero:

$$\begin{aligned} 8\sigma^3 - 8\sigma^2 - 3\sigma + K &= 0 \\ 3\sigma\sqrt{3} - 8\sigma^2\sqrt{3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.198)$$

De la segunda ecuación  $\sigma = 3/8 = 0,375$  y sustituyendo en la primera  $K = 1,83$ .

Cuando se compense con el PI los polos dominantes en lazo cerrado, prácticamente, no se van a modificar por lo que estarán:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\sigma\sqrt{3} = -0,375 \pm j0,65 \quad (3.199)$$

El error en régimen permanente ante una entrada rampa es el error de velocidad, que sin compensar vale:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= 1/K_v \\ K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K}{s(s+1)(s+3)} = \frac{1,83}{3} = 0,61 \end{aligned} \quad (3.200)$$

La función de transferencia del regulador PI es:

$$G_{PI}(s) = K_I \frac{s + \omega_z}{s + \frac{\omega_z}{\beta}} \quad (3.201)$$

Donde:

$$\beta = \frac{K_{vespecificado}}{K_v} \quad (3.202)$$

El error de velocidad, del sistema compensado, ha de valer  $e_{ss} = 1/K_{vespecificado} \leq 0,4$ , es decir,  $K_{vespecificado} \geq 2,5$ , por lo tanto:

$$\beta = \frac{2,5}{0,61} = 4 \quad (3.203)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El cero se toma una década por debajo del polo situado en  $1 \text{ rad/s}$   $\omega_z = 1 \cdot 0,1 = 0,1 \text{ rad/s}$  y el polo en  $\frac{\omega_z}{\beta} = \frac{0,1}{4} = 0,025 \text{ rad/s}$ .

De la condición de módulo se calcula  $K_I$ :

$$\left| K_I K \frac{s_1 + 0,1}{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 3)(s_1 + 0,025)} \right|_{s_1 = -0,375 + j0,65} = \frac{K_I}{1,04} = 1 \quad K_I = 1,04 > 1,02 \quad (3.206)$$

Si el retardo de fase introducido está entre  $0^\circ$  y  $5^\circ$  los polos no estarán lejos de los desados  $s_{1,2}$ . En este caso el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ \not< \angle \frac{s_1 + 0,1}{s_1 + 0,025} = -5,3^\circ < 0^\circ \quad (3.207)$$

Esta condición no se cumple por lo que es necesario retocar la situación del cero. Se selecciona  $\omega_z = 0,05 \text{ rad/s}$  y el polo en  $\frac{\omega_z}{\beta} = \frac{0,05}{4} = 0,0125 \text{ rad/s}$ .

De la condición de módulo se calcula  $K_I$ :

$$\left| K_I K \frac{s_1 + 0,05}{s_1(s_1 + 1)(s_1 + 3)(s_1 + 0,0125)} \right|_{s_1 = -0,375 + j0,65} = \frac{K_I}{1,02} = 1 \quad K_I = 1,02 \geq 1,02 \quad (3.208)$$

y el retardo de fase introducido es de:

$$-5^\circ < \angle \frac{s_1 + 0,05}{s_1 + 0,0125} = -2,6^\circ < 0^\circ \quad (3.209)$$

por lo que la función de transferencia del compensador PI será:

$$G_{PI}(s) = 1,02 \frac{s + 0,05}{s + 0,0125} \quad (3.210)$$

### 3.11. Problema 11

Un sistema de control de posición angular, que utiliza un servomotor DC controlado por armadura, tiene la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 4)} \quad (3.211)$$

y su realimentación es unitaria. Diseñar un regulador PD ideal para que se cumplan las siguientes especificaciones ante una entrada escalón:

Error de posición:  $e_{ss} < 0,1\%$ .

Sobreimpulso máximo:  $M_p = 4,32\%$ .

Tiempo de establecimiento:  $t_s = 0,1 \text{ s}$  (0,07) (0,07)

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

La ecuación característica del sistema sin compensar es:

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad s(s + 4) + K = 0 \quad s^2 + 4s + K = 0 \quad (3.213)$$

e identificando con:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.214)$$

se obtiene:  $\omega_n = 2\sqrt{2} \text{ rad/s}$  y  $K = \omega_n^2 = 8$ .

También se podría haber calculado sabiendo que el ángulo que corresponde a  $\xi = 0,707 = \cos\beta$  es  $\beta = 45^\circ$  y por lo tanto el lugar geométrico de  $\xi = 0,707$  tiene por ecuación  $s = -\sigma + j\sigma$ . El punto de corte con el lugar geométrico de nuestro problema se hallaría resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} s^2 + 4s + K &= 0 \\ s &= -\sigma + j\sigma \end{aligned} \quad (3.215)$$

que conduce a:

$$(-\sigma + j\sigma)^2 + 4(-\sigma + j\sigma) + K = 0 \quad -j2\sigma^2 - 4\sigma + j4\sigma + K = 0 \quad (3.216)$$

e igualando la parte real y la parte imaginaria a cero:

$$\begin{aligned} -2\sigma^2 + 4\sigma &= 0 & \sigma &= 2 \\ -4\sigma + K &= 0 & K &= 8 \end{aligned} \quad (3.217)$$

es decir,  $s_{11} = -\sigma + j\sigma = -2 + j2$

Gráficamente se indica en la figura 3.26

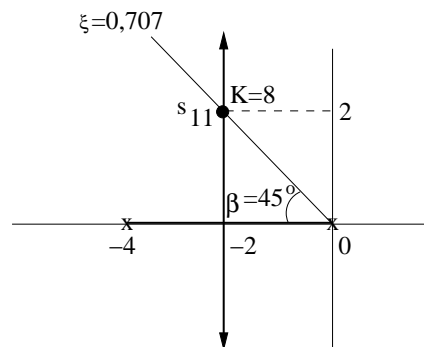


Figura 3.26: Lugar geométrico sin compensar y valor de K para  $\xi = 0,707$

Otra forma de hallar K es viendo que el punto  $s_{11}$  pertenece al lugar de las raíces y que por tanto tendrá que cumplir la condición de módulo:

$$\left| \frac{K}{s_{11}(s_{11} + 4)} \right| = 1 \quad (3.218)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Los polos dominantes en lazo cerrado del sistema compensado han de estar en:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -9,52 \pm j9,52 \quad (3.221)$$

Estos polos no han de pertenecer al lugar geométrico anterior, lo que se comprueba fácilmente mediante la condición de ángulo obtenida de la figura 3.27.

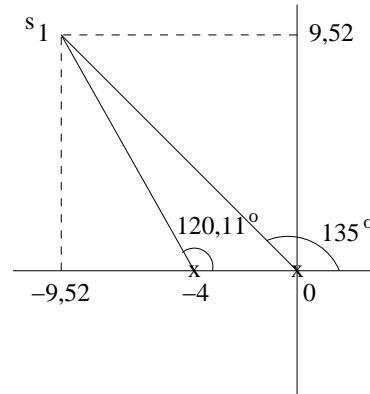


Figura 3.27: Comprobación de que los polos del sistema compensado no pertenecen al lugar geométrico sin compensar

$$-135^\circ - 120,11^\circ = 104,99^\circ \neq 180^\circ \quad (3.222)$$

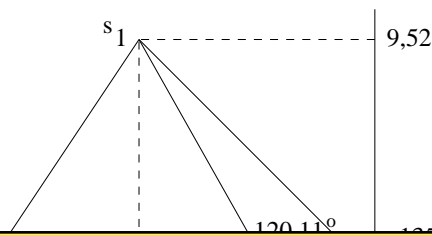
### PD ideal

La función de transferencia será:

$$G_{PD}(s) = K_D(s + \omega_z) \quad (3.223)$$

En la figura 3.28 pueden verse los ángulos de los que se obtiene la condición de fase del sistema compensado:

$$-135^\circ - 120,11^\circ + \alpha = -180^\circ \quad \alpha = 75,11^\circ \quad (3.224)$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

El valor de  $\omega_z$  sería:

$$\tan 75,11^\circ = \frac{9,52}{\omega_z - 9,52} \quad \omega_z = 12 \text{ rad/s} \quad (3.225)$$

El valor de  $K_D$  se obtiene de la condición de amplitud aplicada al polo en lazo cerrado con compensación  $s_1 = -9,52 + j9,52$ :

$$\left| K_D(s_1 + 12) \frac{8}{s_1(s_1 + 4)} \right| = 10,2K_D = 1 \quad K_D = 1,88 \quad (3.226)$$

La función de transferencia de la ganancia de lazo del sistema compensado con el PD ideal será:

$$G_{PD}(s)G(s)H(s) = \frac{1,88 \cdot 8(s + 12)}{s(s + 4)} = \frac{15(s + 12)}{s(s + 4)} \quad (3.227)$$

Como el error estático de posición es:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \leq 10^{-3} \quad K_p \geq 999 \quad (3.228)$$

y en nuestro caso:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{PD}(s)G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{15(s + 12)}{s(s + 4)} = \infty \quad (3.229)$$

por lo que el regulador PD cumple todas las especificaciones dadas.

### 3.12. Problema 12

Se desea diseñar un PID para la planta:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} \quad (3.230)$$

sintonizándolo por Ziegler-Nichols, de modo que el sobreimpulso no exceda del 25%.

a) Calcular teóricamente los valores de  $K_{cr}$  y  $P_{cr}$  y escribir la función de transferencia del PID

b) Diseñar en Simulink un controlador proporcional de ganancia  $K_{cr}$  para que el sistema, en lazo cerrado, oscile

c) Visualizar el periodo de oscilación  $P_{cr}$

d) Visualizar la respuesta al escalón, en lazo cerrado, del sistema controlado con el PID y medir el sobreimpulso

e) Efectuar un ajuste posterior para cumplir la especificación de un sobreimpulso menor

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



La ecuación característica es:

$$s^3 + 2s^2 + 2s + K_{cr} = 0 \quad (3.232)$$

y la tabla de Routh:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & K_{cr} \\ s^1 & \frac{2-K_{cr}}{2} & \\ s^0 & K_{cr} & \end{array} \quad (3.233)$$

El sistema oscilará cuando:

$$\frac{2 - K_{cr}}{2} = 0 \quad K_{cr} = 2 \quad (3.234)$$

y la pulsación de oscilación se deduce de:

$$\begin{aligned} s^3 + 2s^2 + 2s + 2 &= 0 \\ (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2j\omega + 2 &= 0 \\ -j\omega^3 - 2\omega^2 + j\omega + 2 &= 0 \\ (2 - 2\omega^2) + j\omega(1 - \omega^2) &= 0 \\ \omega &= 1 \end{aligned} \quad (3.235)$$

El periodo de oscilación es:

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = 6,28 \quad (3.236)$$

Con estos valores los parámetros del PID son:

$$\begin{aligned} K_p &= 0,6K_{cr} = 1,2 \\ T_i &= 0,5P_{cr} = 3,19 \\ T_d &= 0,125P_{cr} = 0,79 \end{aligned} \quad (3.237)$$

y su función de transferencia:

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 1,2 + \frac{0,376}{s} + 0,948s = \frac{0,956(s + 0,626)^2}{s} \quad (3.238)$$

b) La respuesta de la planta en lazo abierto, a una entrada escalón, es la de la figura 3.29.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

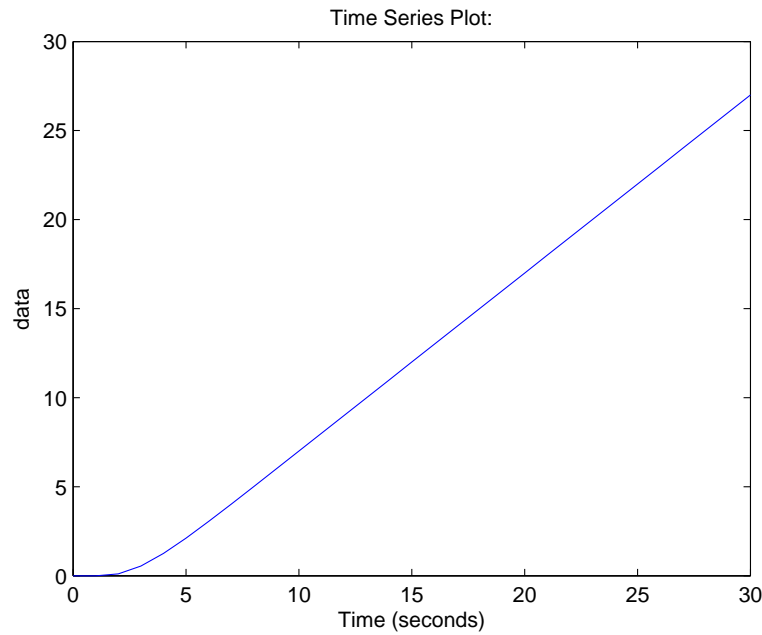


Figura 3.29: Respuesta al escalón de la planta en lazo abierto

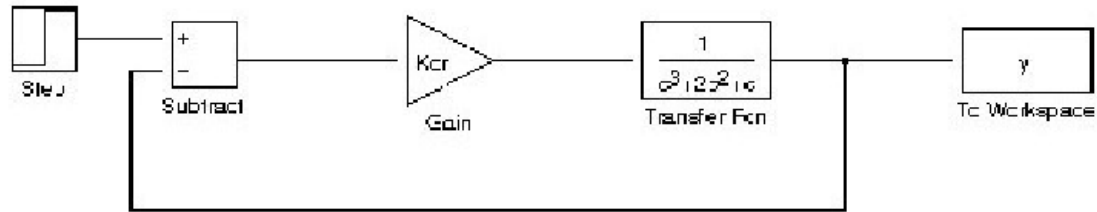
Puede explicarse, fácilmente, teniendo en cuenta que el polo dominante está en el origen y que por tanto se comporta como un integrador y la integral de una constante es una recta. La ganancia  $K_{cr}$  que hace que el sistema de la figura 3.30 oscile, es  $K_{cr} = 2$ .

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Figura 3.30: Controlador proporcional para que oscile

c) En este caso la señal de salida es la indicada en la figura 3.31

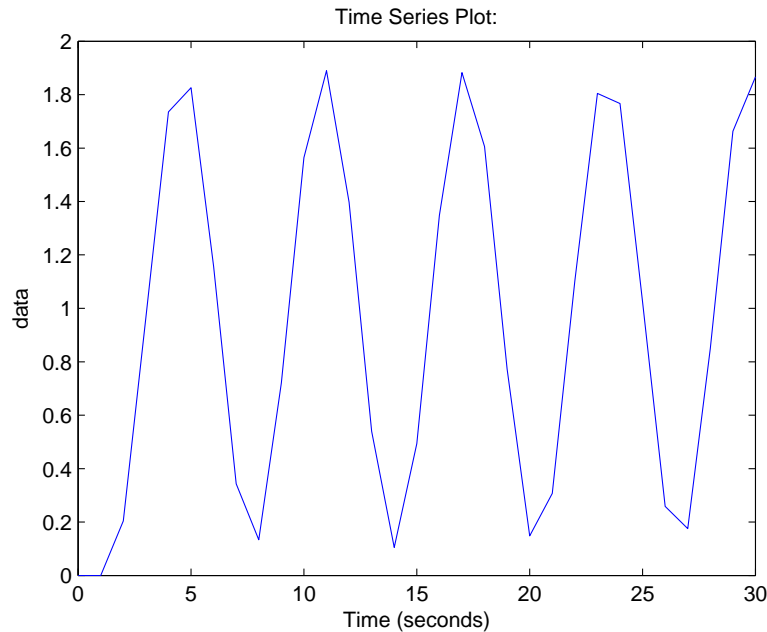


Figura 3.31: Oscilación mediante la ganancia  $K_{cr} = 2$

El valor del periodo de oscilación es de  $P_{cr} = 6,28$

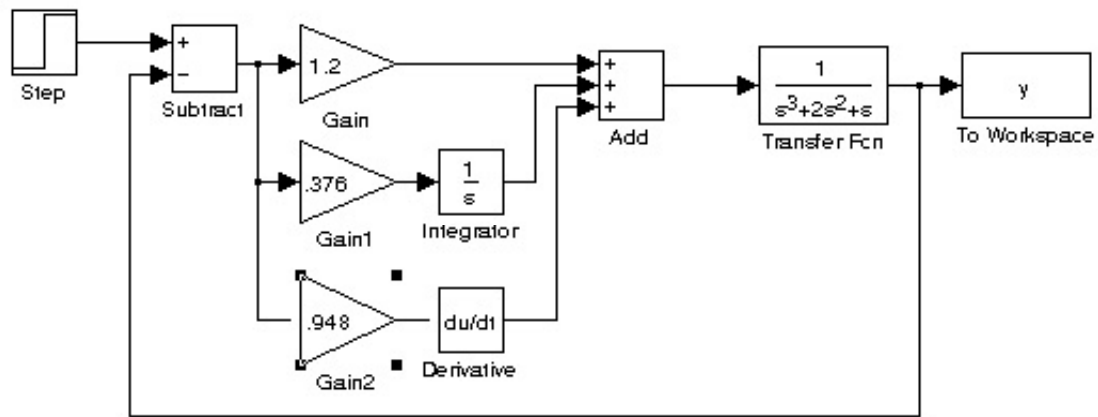
d) El diagrama de bloques con el controlador PID es el de la figura 3.32

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Figura 3.32: Controlador PID

y la señal de salida se indica en la figura 3.33

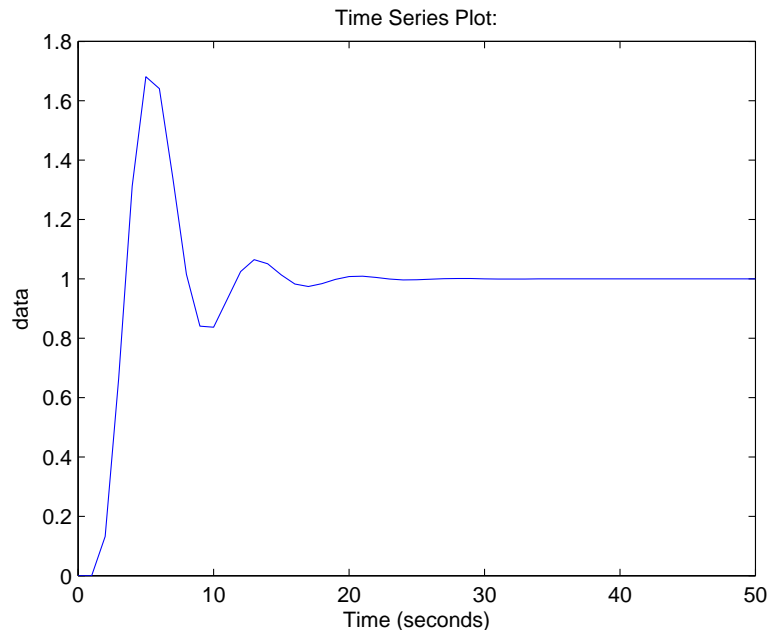


Figura 3.33: Salida con el PID

El sobreimpulso se acerca al 70 %.

e) Desplazando los ceros del PID hacia la derecha, para neutralizar el polo dominante de la planta que se encuentra en el origen, se consigue un sobreimpulso menor. Desplazándolos, por ejemplo, a  $s = -0,3$  resulta:

$$G_c(s) = \frac{0,956(s + 0,3)^2}{s} = 0,5736 + \frac{0,086}{s} + 0,956s \quad (3.239)$$

y sustituyendo estos valores en el diagrama de la figura 3.32 se obtiene la salida de la figura 3.34. En este caso el sobreimpulso se acerca al 25 %

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

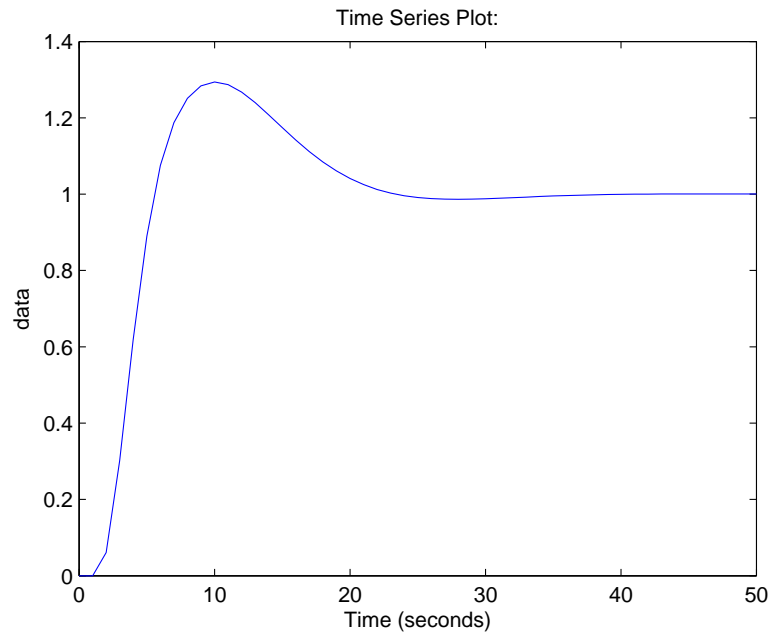


Figura 3.34: Ajuste final del PID

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70