ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

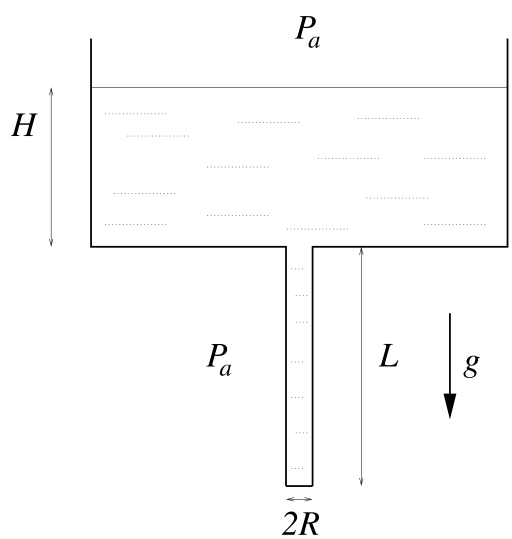
Problema 1

Considere un conducto cilíndrico de longitud L y radio R, tales que $L \gg R$, que se encuentra conectado a un depósito abierto de gran capacidad que está lleno de un volumen $V \sim L^3$ de líquido de densidad ρ y viscosidad μ, que alcanza una altura $H \sim L$ tal como se indica en la figura. En un instante dado, se abre el extremo inferior y el líquido comienza a descargarse a la atmósfera debido al efecto de la gravedad. Para estudiar el proceso de descarga se pide seguir los siguientes pasos:

1. Dé los criterios necesarios para que la viscosidad sea dominante en el movimiento en el conducto, estimando, en particular, la longitud característica a la entrada del tubo donde el efecto de la convección en el movimiento es significativo, asi como el tiempo inicial del transitorio durante el que los efectos no-estacionarios son importantes.

2. Obtenga la evolución de la altura del líquido en el depósito como función del tiempo, asi como el tiempo de vaciado del depósito.

3. Considere el transitorio inicial de puesta en movimiento. En particular, escriba la ecuación con condiciones iniciales y de contorno que gobierna el movimiento. Utilize para ello variables adimensionales adecuadas, de forma que la ecuación obtenida quede libre de parámetros.



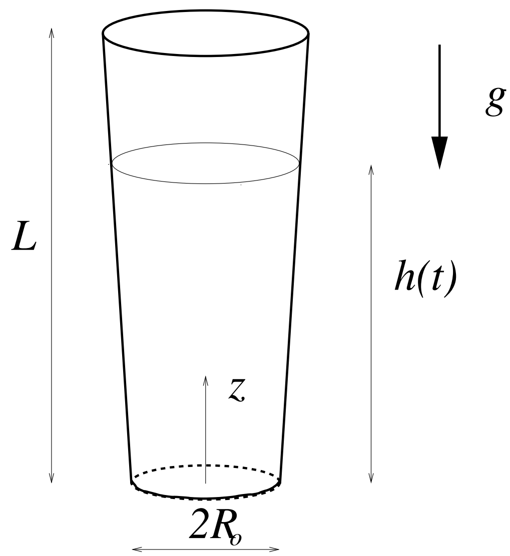
ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 2

Un tubo troncocónico de longitud L posee un radio que varía con la distancia a la base del tubo, z, en la forma $R = R_o(1 + \alpha z/L)$, donde $R_o \ll L$ es el radio en la base del tubo y α es una constante positiva conocida de orden unidad. El tubo se encuentra inicialmente cerrado en su extremo inferior, de forma que contiene un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. En un instante dado, se abre el extremo inferior y el líquido comienza a descargar a la atmósfera debido al efecto de la gravedad. Suponiendo que los efectos viscosos son dominantes en el movimiento que aparece (dar el criterio para ello), se pide calcular el tiempo de descarga.

Solución: $t_d = (8\mu L)/(3\alpha\rho g R_o^2)[(4+\alpha)\alpha/2 + \ln(1+\alpha)]$



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 3

Un canal bidimensional de paredes porosas cuya anchura es h y cuya longitud es $L \gg h$ separa dos depósitos infinitamente grandes que contienen un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. Las presiones existentes en los depósitos son p_1 y $p_2 < p_1$, respectivamente, de forma que el líquido circula a lo largo del canal debido al gradiente de presión. A traves de la pared inferior del canal se inyecta fluido con velocidad v_o normal a la pared, mientras que a traves de la pared superior se succiona fluido con la misma velocidad v_o. Para analizar el movimiento en el canal conviene adoptar un sistema de referencia $x - y$, tal como se indica en la figura. Sabiendo que $\Lambda = \rho v_o h/\mu$ es de orden unidad y que $\rho(p_1 - p_2)h^4/(\mu^2 L^2) \ll 1$, se pide:

1. Demostrar mediante estimaciones de ordenes de magnitud que el término de convección longitudinal es despreciable en la ecuación de momento y que las variaciones de velocidad transversal son pequeñas frente a v_o, de forma que la componente longitudinal de la ecuación de la cantidad de movimiento se reduce a

$$v_o \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

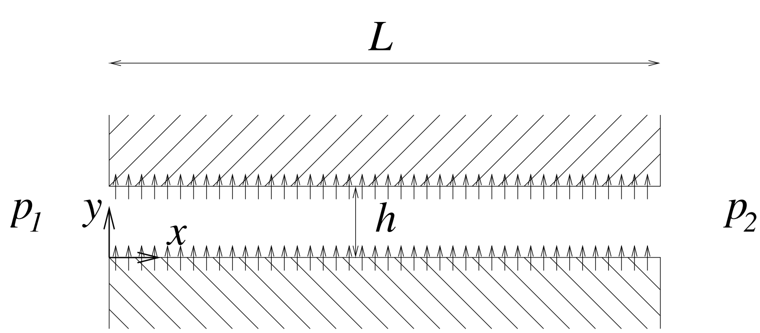
   donde $\nu = \mu/\rho$ y u es la componente longitudinal de la velocidad.

2. Mediante integración de la ecuación anterior con condiciones de contorno apropiadas, determinar el perfil de velocidades $u(y)$.

3. Obtener el caudal que pasa por el canal en función de Λ y de los otros parámetros del problema, así como la fuerza de fricción sobre cada una de las paredes del canal, indicando claramente su sentido.

4. Considerar ahora el límite $\Lambda \ll 1$, comprobando que se recupera la solución de Poiseuille en primera aproximación.

5. Investigar también el límite $\Lambda \gg 1$. Para ello, se aconseja reescribir en forma adimensional la ecuación dada más arriba. Comprobar que la convección transversal domina al término viscoso en la mayoría del campo fluido, de forma que existe una solución "exterior" no viscosa que no cumple la condicion de contorno en la pared superior, dando lugar a la aparición de una capa límite. Obtener, en particular, la solución exterior, el espesor caracteristico de la capa límite y la solución en el interior de dicha capa límite.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 4

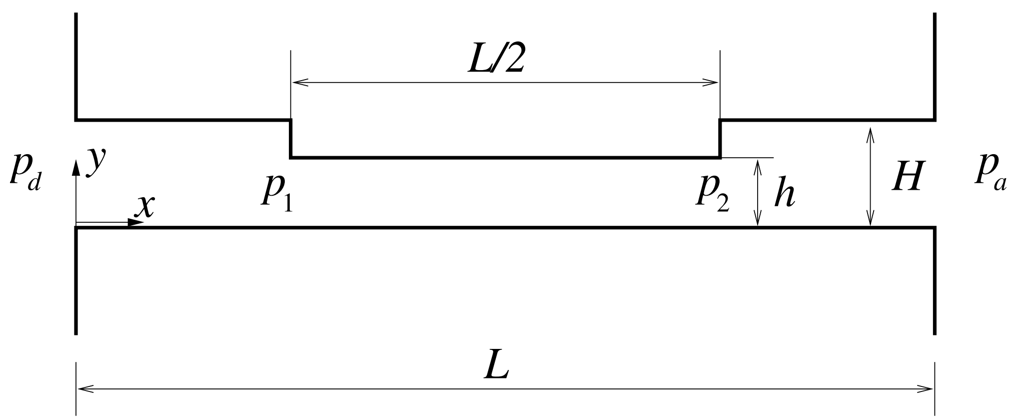
El canal bidimensional de longitud L y anchura H ($H \ll L$) de la figura adjunta conecta un depósito de líquido donde la presión es p_d con la atmósfera, donde la presión es p_a. Tal y como puede verse, existe un estrechamiento en la sección central del canal de longitud $L/2$ y anchura $h \sim H$. Sabiendo que el líquido tiene densidad ρ y viscosidad μ, se quiere estudiar la influencia de dicho estrechamiento sobre el caudal que circula por el canal. En particular, se pide:

1. En función de los datos que se dan más arriba, dar el criterio que se debe cumplir para que el movimiento en el canal esté dominado por la viscosidad.

2. Suponiendo conocidos los valores p_1 y p_2 de la presión a la entrada y salida del estrechamiento, obtener el campo de velocidades en las tres secciones del canal.

3. Determinar el caudal y los valores de p_1 y p_2.

4. Particularizar los resultados anteriores a los casos $h = H$ y $h \ll H$, explicando los valores obtenidos.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

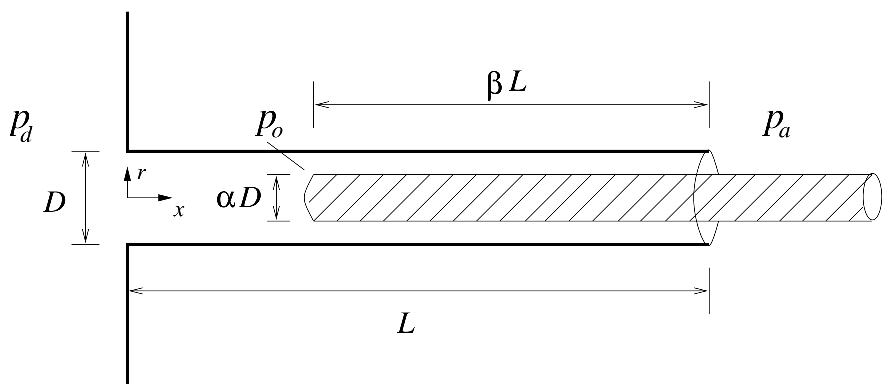
Problema 5

Un depósito lleno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ que se encuentra a presión p_d descarga a la atmósfera, donde la presión es $p_a < p_d$, a través de un conducto cilíndrico de diámetro D y longitud L ($D \ll L$). Para controlar el caudal Q que circula por el conducto se utiliza un tubo cilíndrico de diámetro αD ($\alpha < 1$), que se introduce concéntricamente desde la salida del conducto hasta ocupar una longitud βL ($\beta \leq 1$), tal y como se indica en la figura adjunta. Se pide:

1. En función de los datos que se dan más arriba, dar el criterio que se debe cumplir para que el movimiento en el conducto esté dominado por la viscosidad.

2. Suponiendo conocido el valor p_o de la presión en el extremo del tubo, obtener el campo de velocidades para $0 \leq x/L < (1-\beta)$ y para $(1-\beta) < x/L \leq 1$.

3. Determinar el caudal Q y el valor de p_o.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 6

Para limpiar una superficie cubierta de aceite de densidad ρ y viscosidad μ se arrastra el limpiador de longitud L y altura $h \ll L$ de la figura adjunta paralelamente a la superficie a una velocidad constante U. Para el arrastre, el extremo A del limpiador se mantiene a una altura h constante, ejerciéndose además una fuerza horizontal F_x que pone en movimiento el aparato, tal y como se indica en la figura. Para estudiar el problema, se aconseja considerar un sistema de referencia $x-y$ que se desplaza con el limpiador, de forma que, en dicho sistema de referencia, la superficie se mueve con velocidad $-U\bar{e}_x$. Suponga que el canal rectangular que se forma entre el limpiador y la superficie se encuentra lleno de aceite. Sabiendo que la presión en el exterior es p_a, se pide:

1. En función de los datos que se dan más arriba, dar el criterio que se debe cumplir para que el movimiento del aceite en el interior del limpiador esté dominado por la viscosidad.

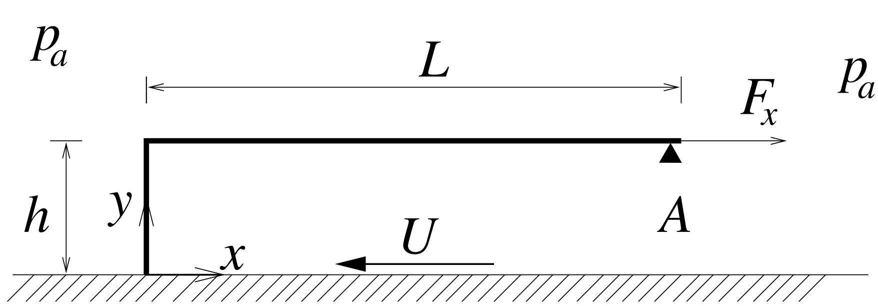
2. Obtener y representar el perfil de velocidad a través de la sección del canal.

3. Calcular la distribución de presión $p(x)$ en el interior del limpiador, determinando en particular el valor de la presión en el extremo $x = 0$.

4. Determinar la fuerza F_x necesaria para establecer el movimiento.

5. Obtener el momento que ejerce el fluido con respecto al punto de sujección A.

6. Sabiendo que el peso del limpiador es W, determine el valor crítico de U para el que el extremo $x = 0$ del limpiador se levanta dejando salir el aceite.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

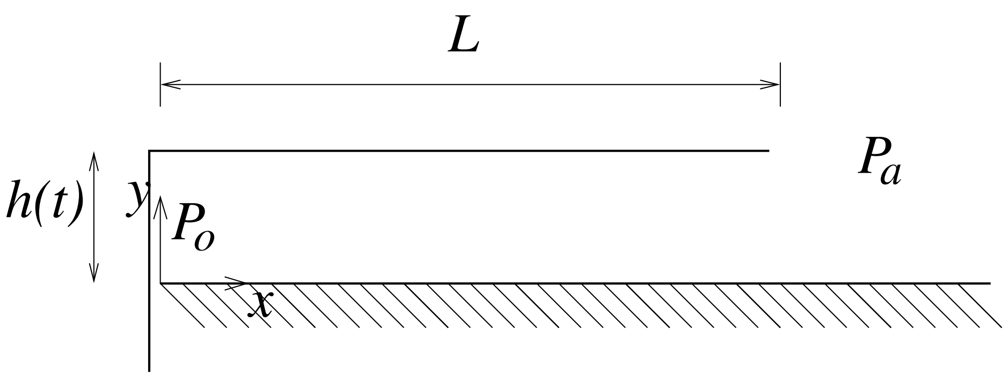
Problema 7

La escuadra de longitud L de la figura adjunta se mueve perpendicularmente a una pared, con lo que se forma un canal de altura $h(t) \ll L$ que contiene un líquido de viscosidad μ. Al disminuir la altura del canal, con una ley $h(t)$ conocida, el líquido se ve forzado a salir al exterior, donde la presión es P_a. Suponiendo que el movimiento está dominado por la viscosidad, se pide:

1. Obtener la distribución de presión a lo largo del canal (incluyendo el valor de la presión $P_o(t)$ en $x = 0$), el caudal $q(x,t) = \int_0^h u \mathrm{d}y$ y el perfil de velocidad $u(x, y, t)$.

2. Determinar la fuerza que se ejerce sobre la escuadra (F_x, F_y).

3. Calcular el momento que se ejerce respecto al vértice de la escuadra.



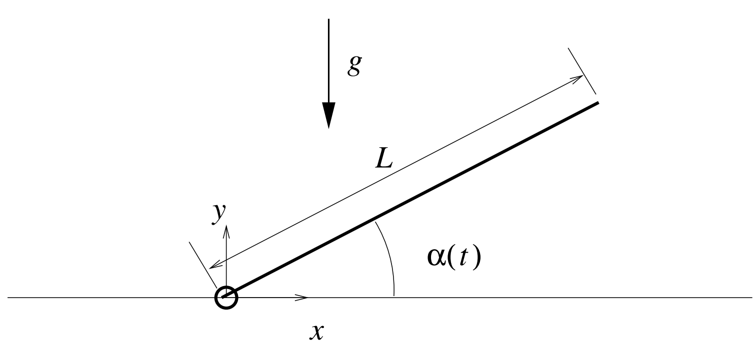
ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 8

La placa bidimensional de longitud L y masa (por unidad de anchura perpendicular al plano) M de la figura adjunta gira alrededor de su extremo articulado debido al efecto de la gravedad. En el instante inicial, la placa se encuentra en reposo ocupando la posición $\alpha = \alpha_o \ll 1$. La placa está rodeada por un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. Durante el proceso de caída, el líquido situado en la cuña formada por la placa y la pared se ve desplazado hacia fuera, con lo que se generan sobrepresiones en el interior de la cuña que contribuyen a ralentizar el movimiento de caída. Se trata de determinar la evolución de $\alpha(t)$ suponiendo que el efecto de la viscosidad es dominante en el movimiento inducido en la cuña. En particular, se pide:

1. Estimar el tiempo de caída de la placa y las velocidades que se inducen en el fluido.
2. Dar el criterio para que el efecto de la viscosidad sea dominante en el movimiento en el interior de la cuña.
3. En el supuesto anterior, escribir las componentes x e y de la ecuación de la cantidad de movimiento, demostrando que el efecto de la gravedad es despreciable en el movimiento, y que podemos además despreciar las variaciones transversales de presión, de modo que $p = p(x,t)$.
4. Obtener el campo de presiones y velocidades en el interior de la cuña.
5. Escribir la ecuación con condiciones iniciales que determina $\alpha(t)$ (recuerde que el momento de inercia por unidad de anchura de una placa que gira alrededor de su extremo es $I = ML^2/3$).
6. Adimensionalizar el problema anterior, demostrando que la solución $\alpha(t)/\alpha_o$ es función de un único parámetro adimensional $\Lambda = (\mu L^{1/2})/(M\alpha_o^{5/2} g^{1/2})$.
7. Obtener la solución en el límite $\Lambda \gg 1$, cuando el momento asociado a las fuerzas de presión equilibra en primera aproximación al momento asociado a la fuerza de la gravedad.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 9

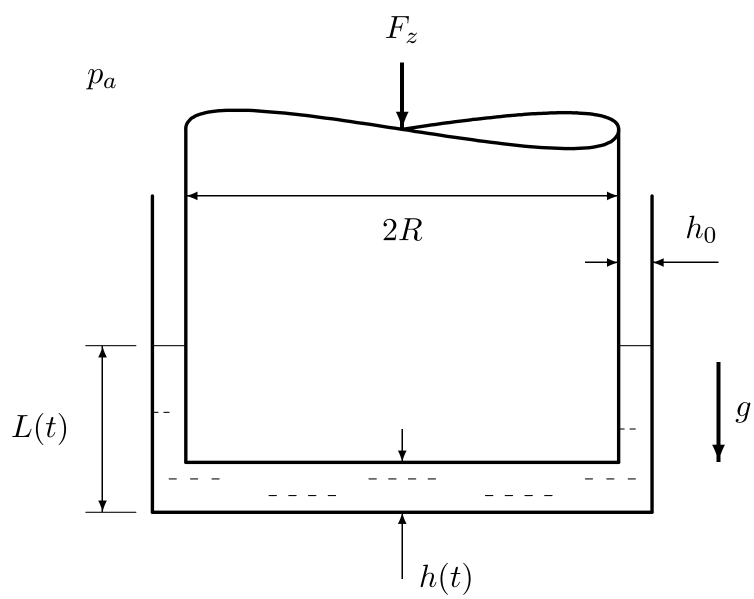
Se pretende estudiar el sistema de **procesado de plásticos mediante prensado** de la figura adjunta, suponiendo que para las condiciones de prensado el plástico puede considerarse un fluido newtoniano de densidad ρ y viscosidad μ constantes. El sistema de prensado está compuesto por un vástago de radio R que penetra en un **cilindro** concéntrico de radio $R + h_0$ con una ley $h(t) = 3h_0 - Vt$ conocida, siendo $h_0 \ll R$. Al penetrar el vástago en el cilindro, la distancia $h(t)$ disminuye y el plástico se ve forzado a salir por la holgura lateral. Se genera así un frente $L(t)$ que asciende durante el proceso de inyección desde $L = 3h_0$ en $t = 0$ hasta $L \simeq R$ en $t = t_p$. Sabiendo que la presión del aire p_a se mantiene constante, se pide:

1. Imponiendo la **conservación del volumen de plástico**, calcule la ley $L(t)$ y el tiempo t_p necesario para completar el proceso de prensado.

2. De el criterio que se debe cumplir para que el movimiento del plástico esté dominado por la viscosidad.

3. Determine el campo de presiones en el interior del plástico. Para ello se recomienda estudiar por separado el campo de presiones bajo el vástago y en la holgura lateral, e imponer que la presión p^* en la esquina (que debe calcularse como parte de la solución) debe ser la misma en ambos casos.

4. Calcule la fuerza vertical $F_z(t)$ que se debe ejercer sobre el vástago para completar el proceso.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

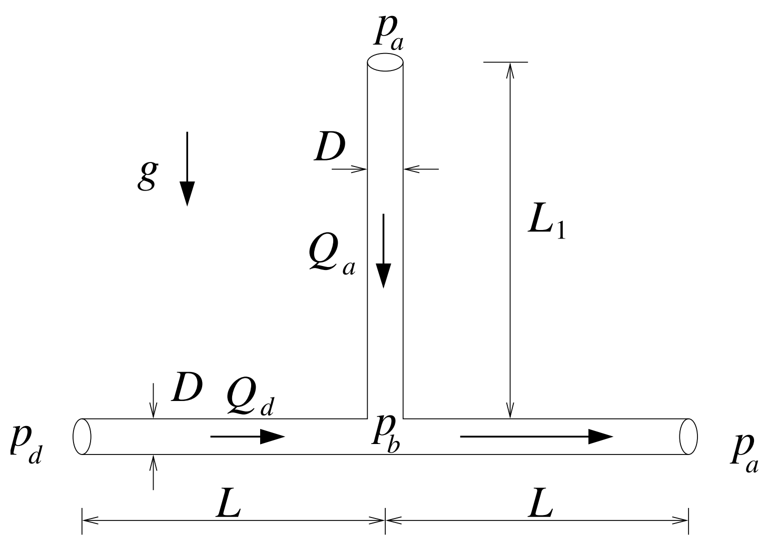
Problema 10

Considere el movimiento estacionario de un líquido en el sistema de conductos de la figura adjunta, todos ellos de diámetro D. El tramo vertical de longitud L_1, que recoge líquido de un depósito a presión p_a, vierte un caudal Q_a en el punto medio de un conducto horizontal de longitud $2L$. Dicho conducto une un depósito a presión p_d con la atmósfera, a presión p_a. Suponiendo conocidas las propiedades del líquido, así como los valores de D, L, L_1, p_d y p_a, se pide:

1. Dar las condiciones para las que el movimiento en los conductos está dominado por la viscosidad.

2. Obtener el valor de la presión en la bifurcación p_b y de los caudales Q_a y Q_d que circulan por el conducto vertical y por el primer tramo de conducto horizontal.

3. Obtener el rango de valores de $(p_d - p_a)$ para el cual el líquido circula en el sentido indicado en la figura (esto es, para el que Q_a y Q_d son positivos).



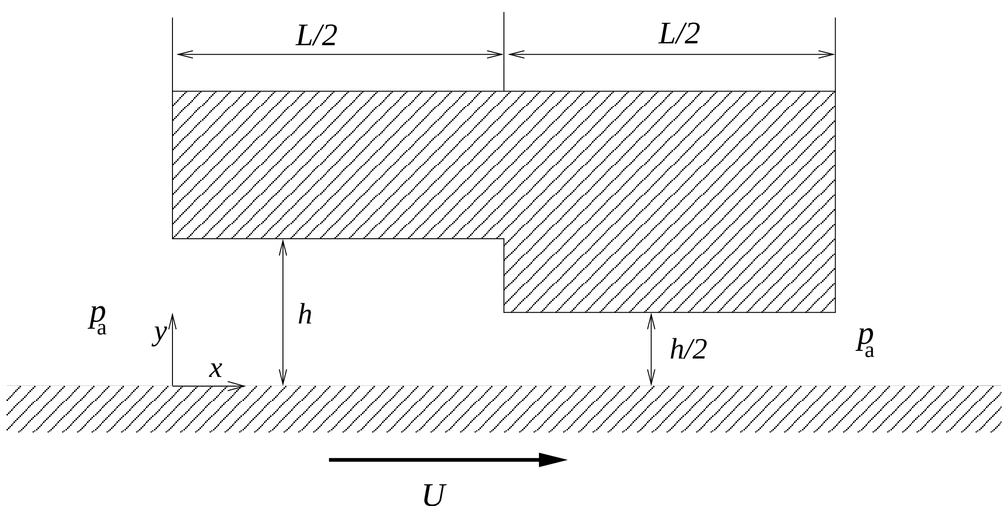
ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 11

Considere el cuerpo bidimensional de longitud $L \gg h$ en forma de escalón que se mueve con respecto a una superficie plana fija con velocidad U. El hueco entre la placa plana y el escalón se encuentra relleno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ. Para estudiar el movimiento que se origina en dicho líquido es conveniente utilizar un sistema de referencia x-y moviéndose con el cuerpo tal y como se muestra en la figura. Sabiendo que la presión en el exterior del cuerpo es p_a, se pretende estudiar el campo de presiones $p(x)$ suponiendo que las fuerzas viscosas son dominantes en el movimiento. Para ello,

1. Indique las condiciones necesarias para considerar el movimiento dominado por la viscosidad.
2. Sabiendo que el flujo que se establece es suma de un flujo de Couette y un flujo de Poiseuille obtenga el campo de velocidades en los tramos $0 < x < L/2$ y $L/2 < x < L$ respectivamente.
3. Suponiento conocido el caudal por unidad de envergadura, q, que circula entre la placa plana y el escalón obtenga la distribución de presiones, $p(x)$, en ambos tramos.
4. A partir de los resultados anteriores obtenga el valor de la presión, p_1, en $x = L/2$ y el valor del caudal q.
5. Determine la fuerza por unidad de envergadura que se ejerce sobre el escalón.



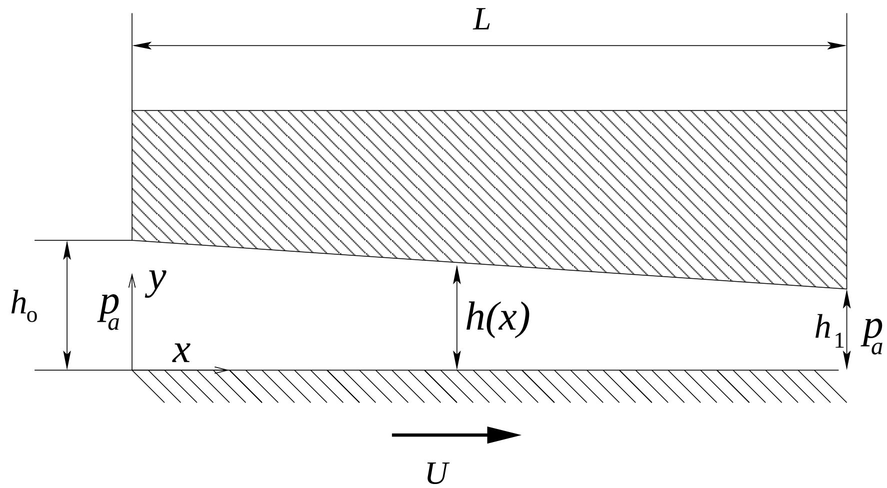
ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 12

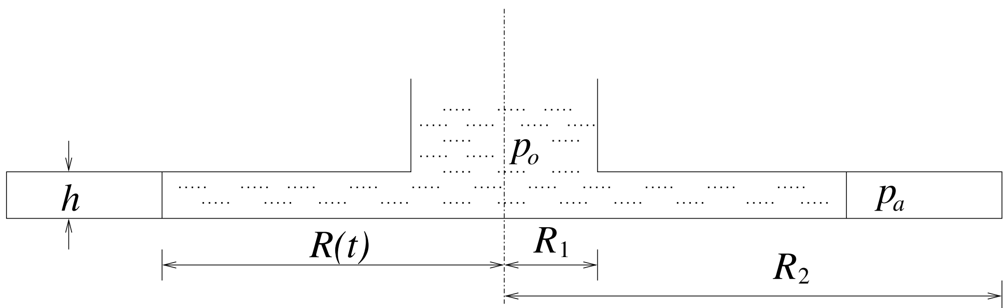
Considere el cuerpo bidimensional de longitud $L \gg h_0$ en forma de cuña que se muestra en la figura. El hueco entre la placa plana situada en $y = 0$ y la cuña se encuentra relleno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ constantes. La superficie $y = 0$ se mueve con una velocidad U constante en la dirección del eje x. Sabiendo que que el espesor de la ranura que separa la cuña de la superficie inferior viene dado por $h(x) = h_o(1 - \alpha\, x/L)$ con $\alpha = (h_o - h_1)/h_o < 1$, se pide:

1. Indique las condiciones necesarias para considerar el movimiento dominado por la viscosidad.
2. Determine el campo de velocidades en $0 < x < L$ suponiendo conocido el gradiente de presión $\partial p/\partial x$.
3. Determine y represente esquemáticamente la distribución de presiones para $0 < x < L$.
4. Obtenga el caudal que circula por la ranura por unidad de envergadura, q.
5. Obtenga la fuerza de presión que actúa sobre la placa inferior, F_p.
6. Obtenga la fuerza viscosa que actúa sobre la placa inferior, F_v.
7. Obtenga la relación de fuerzas F_p/F_v y comente el resultado.



Problema 13

Se pretende estudiar el funcionamiento del sistema de moldeo por inyección de plástico de la figura adjunta, suponiendo que para las condiciones de inyección el plástico puede considerarse un fluido newtoniano de densidad ρ y viscosidad μ constantes. El sistema inyecta plástico en un molde en forma de disco cilíndrico de altura h, radio interior $R_1 \gg h$ y radio exterior $R_2 \sim R_1$. El fluido que va llenando el disco forma un frente $R(t)$ que avanza durante el proceso de inyección desde $R = R_1$ hasta $R = R_2$ desplazando el aire que se encuentra inicialmente en el interior del molde. Tanto la presión de inyección p_o como la presión del aire p_a se mantienen constantes durante el proceso. Suponiendo que el movimiento está dominado por la viscosidad, se pide determinar el campo de presiones en el interior del molde, $p(r)$, y el caudal de inyección, Q, cuando el frente se encuentra situado en la posición R, dando las condición necesaria para que el proceso esté efectivamente dominado por la viscosidad. Además, se pide obtener la variación de $R(t)$ y el tiempo t_i necesario para completar el proceso de inyección.



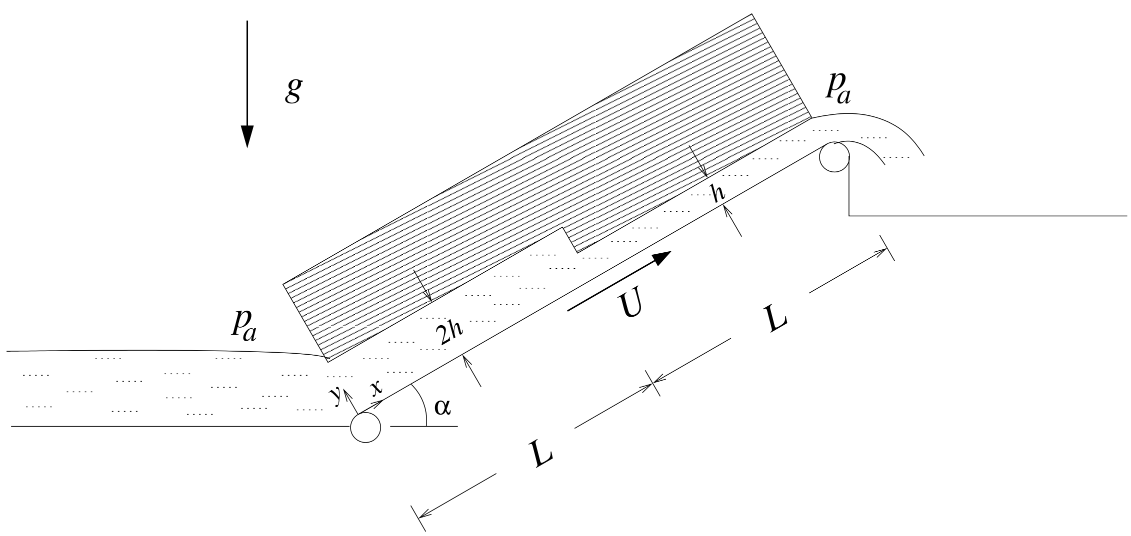
ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 14

Se pretende estudiar el funcionamiento del sistema de bombeo de la figura adjunta. El sistema consiste en una cinta inclinada que se mueve paralelamente a si misma con velocidad U arrastrando en su movimiento a un líquido de viscosidad μ a lo largo de un canal bidimensional formado por dos tramos de igual longitud L cuyas alturas son $2h$ y $h \ll L$, respectivamente. El líquido es tomado y descargado a presión p_a. Se pide:

1. Dar el criterio para que el movimiento del líquido en el canal esté dominado por la viscosidad.
2. Calcular la distribución de presiones a lo largo del canal $p(x)$.
3. Determinar el caudal de líquido que se eleva Q, así como la velocidad mínima U_m para la que $Q > 0$.
4. Obtener la potencia necesaria para mover la cinta.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 15

En la figura se muestra el modelo bidimensional (de dimensión infinita en la dirección normal al papel) de un vehículo aerodeslizante, constituido por un depósito de aire presurizado a presión $p_0 > p_\infty$, donde p_∞ representa la presión atmosférica. La base del vehículo está formada por dos cuñas truncadas idénticas, de longitud a y ángulo α, cuyas caras superiores se encuentran alineadas en posición horizontal. El depósito descarga a la atmósfera a través de una pequeña ranura de anchura $2b$ situada en la base del vehículo, formándose una película delgada de fluido de espesor $h(x) \ll a$ entre el vehículo y la superficie horizontal donde se apoya. Suponiendo que el vehículo se encuentra en reposo y que el aire es un fluido incompresible, con densidad ρ y viscosidad μ constantes, se pide:

1. Determine qué condición se debe cumplir para que los efectos viscosos sean dominantes en el flujo en la película.

2. Suponiendo que se verifique la condición anterior, escriba la ecuación diferencial y condiciones de contorno que determinan la distribución de presiones en el interior de la película fluida.

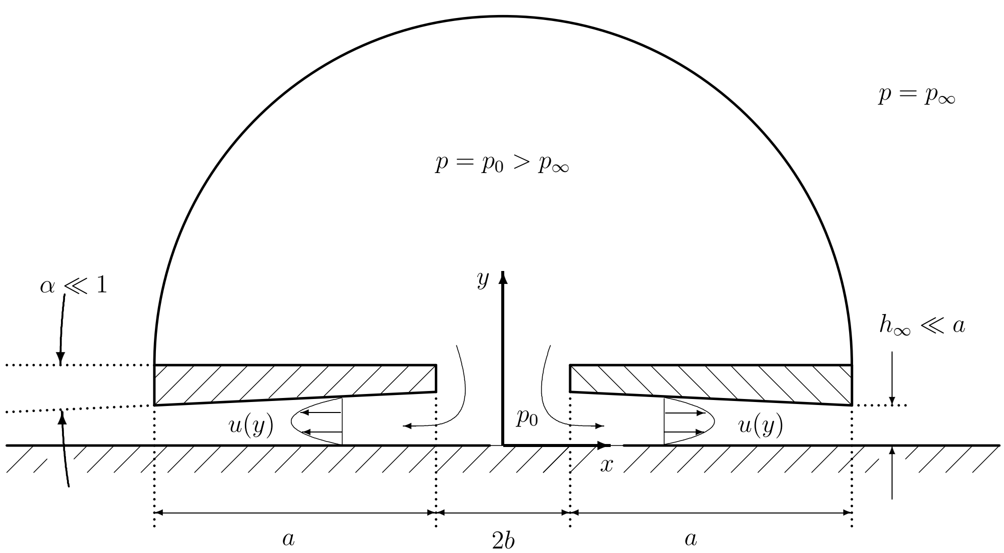
3. Obtenga el flujo volumétrico y la distribución de presiones en función de los parámetros del problema. (En el calculo de la distribución de presiones conviene escribir el espesor de la película fluida en la forma $h(x) = h_0[1-(1-\beta)(x-b)/a]$, siendo $h_0 = h_\infty + \alpha a$ y $\beta = h_\infty/h_0$.)

4. Integre la distribución de presiones para obtener la fuerza vertical que experimenta el vehículo:

$$F_y \simeq 2\int_0^{a+b}(p-p_\infty)dx$$

   expresando dicha fuerza en función del parámetro β.

5. Si la masa del vehículo por unidad de longitud es m (incluyendo el aire contenido en el depósito), escriba la ecuación que determina la altura h_∞ a la que queda levitado el vehículo en función de la diferencia de presiones $p_0 - p_\infty$.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 16

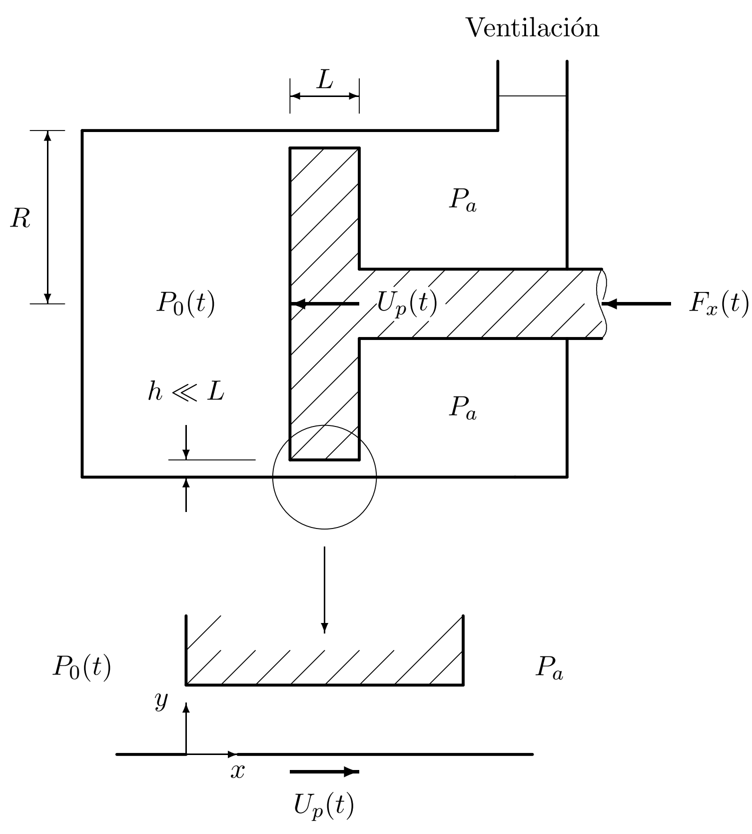
Considérese el dispositivo amortiguador de la figura en el que un pistón de altura L se mueve con velocidad $U_p(t)$ **conocida** dentro de un **cilindro** de radio $R \geq L$ que contiene un líquido lubricante de densidad ρ y viscosidad μ constantes. Debido al desplazamiento del pistón, el líquido se ve forzado a fluir por la ranura entre el pistón y el cilindro, cuyo espesor es $h \ll L$. Para estudiar el problema, se aconseja utilizar un sistema de referencia $x - y$ que se desplaza con el pistón, de forma que, en dicho sistema de referencia, la superficie del cilindro se mueve con velocidad $U_p(t)\bar{e}_x$. Sabiendo que en el cilindro existe un orificio de ventilación que mantiene la presión (reducida) a la derecha del pistón igual a su valor atmosférico P_a, se pide:

1. Estime el orden de magnitud de las velocidades que aparecen en la ranura y de el criterio que se debe cumplir para que el movimiento del líquido en la ranura esté dominado por la viscosidad. En las estimaciones, denomine U_0 al valor característico de la velocidad del pistón y t_0 el tiempo característico de variación de la misma, ambos conocidos.

2. Obtenga el campo de velocidades en la ranura, así como el valor del caudal de líquido que sale a través de la misma.

3. Calcule la distribución de presiones en la ranura, determinando en particular el valor de la presión (reducida) en el fluido que queda a la izquierda del pistón, $P_0(t)$.

4. Determine la fuerza $F_x(t)$ necesaria para establecer el movimiento.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 17

Se pretende estudiar el movimiento **axilsimétrico** y estacionario de una película de líquido, de densidad ρ y viscosidad μ constantes, que resbala debido al efecto de la gravedad a lo largo de una varilla cilíndrica colocada en posición vertical. El radio de la varilla, $a(x)$, presenta variaciones apreciables en distancias de orden $\Delta x \sim L$ a lo largo de la varilla. Supuesto conocido el caudal Q de líquido que desliza por la varilla, e ignorando los efectos de tensión superficial, se pide:

1. De las condiciones para que el movimiento del líquido en la película se pueda considerar casi-unidireccional y dominado por la viscosidad.

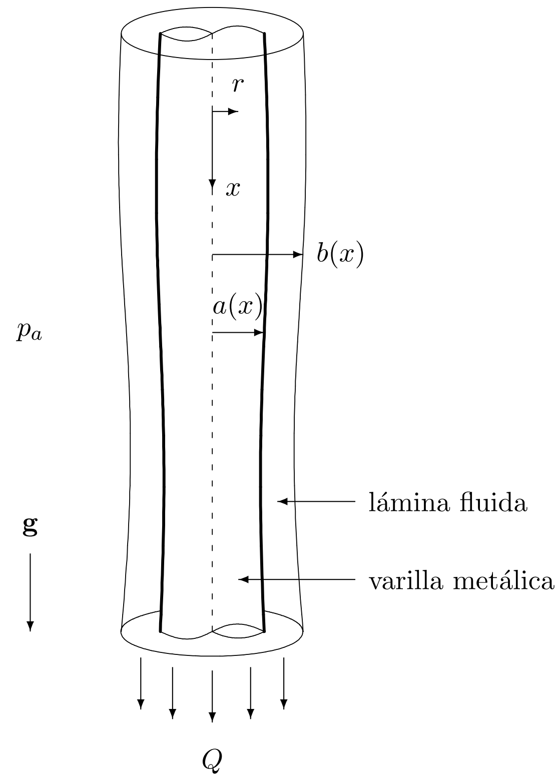
En el caso particular en que la varilla tiene radio a **constante**, se pide:

2. Calcule el campo de presiones y el campo de velocidades dentro del líquido.
3. Represente de forma esquemática el campo de velocidades obtenido en el apartado anterior.
4. Calcule la fuerza viscosa que ejerce el líquido sobre la varilla por unidad de longitud de la misma.

Suponiendo que se cumplen las condiciones del primer apartado:

5. Escriba la ecuación que permitiría calcular el espesor de la película, $b(x)$, correspondiente a un caudal, Q, y una geometría de la varilla, $a(x)$, dados.

Nota: $\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2}\left(\log x - \frac{1}{2}\right)$



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 18

Se desea modelar el filtrado de aceite por gravedad en una pieza mediante teoría de lubricación. La pieza consiste en un cilindro de radio R introducido en un surco de una placa de espesor $R+h$, siendo $h \ll R$. El surco tiene una forma hemicilíndrica de radio $R+h$ y es coaxial con el cilindro. En la generatriz superior del surco se ha mecanizado una ranura de espesor $2h$ que conecta el espacio cilindro-surco con una capa de lubricante de espesor $H \sim R$. Se conocen la densidad del lubricante, ρ, y su viscosidad, μ. Para calcular el caudal por unidad de longitud de cilindro, q, que sale por los laterales de éste se propone seguir los siguientes pasos:

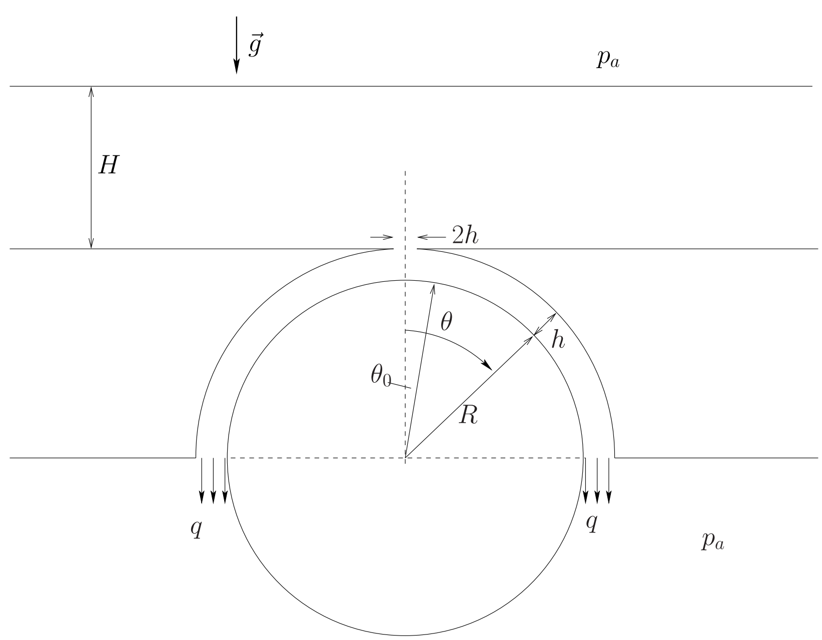
1. Deduzca las condiciones que deben cumplir los parámetros del problema para que, en efecto, se pueda aplicar teoría de lubricación a la capa de fluido existente entre el cilindro y el surco. En lo que sigue suponga que dichas condiciones se cumplen.

2. Aun cuando se puede aplicar teoría de lubricación, existe siempre una región próxima a la ranura ($\theta \ll 1$) en la que la teoría de lubricación falla. Estime el tamaño de esta región en términos de su extensión angular, θ_0. Para este apartado y el anterior, se sugiere realizar una estimación de órdenes de magnitud en la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección θ. En lo que sigue suponga conocido el ángulo θ_0.

3. Escriba la ecuación de lubricación de Reynolds aplicada a la extensión de película fluida que se extiende entre el ángulo θ_0 y el plano inferior de la placa, $\theta = \pi/2$.

4. Escriba las condiciones de contorno necesarias para determinar el campo de presiones en el interior de la película. Desprecie las variaciones de presión que pudieran ocurrir al pasar el líquido por la ranura.

5. Integre el sistema anterior para obtener una ecuación que proporcione el caudal, q, definido arriba.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 19

El líquido de densidad ρ y viscosidad μ contenido en un depósito muy grande descarga, bajo la acción de la gravedad, a través de un tubo cilíndrico vertical de radio R_T y longitud $L \gg R_T$. Como muestra la figura adjunta, en el interior del tubo hay un hilo concéntrico de radio $R_0 \ll R_T$, que se prolonga muy por debajo del extremo inferior del tubo. Se pide estudiar la **descarga estacionaria** del líquido desde el depósito, determinando en particular los valores del caudal de descarga, Q, y del radio de la película líquida anular que rodea al hilo muy por debajo del final del tubo, R_∞, en condiciones tales que domine la viscosidad en el movimiento del líquido en el conducto y en el chorro. Para ello,

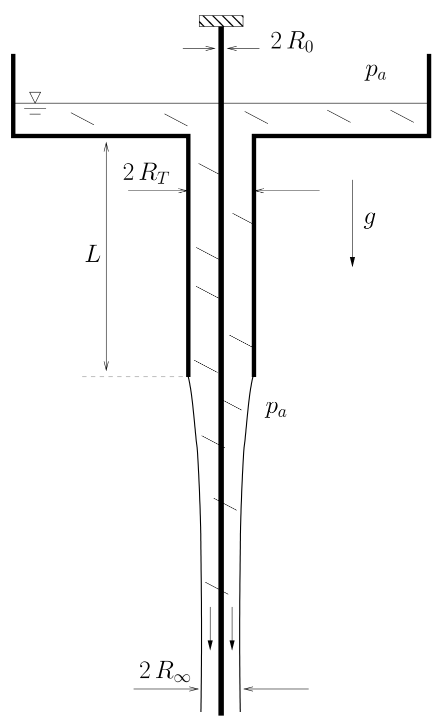
1. Proporcione un criterio para que el movimiento del líquido esté dominado por la viscosidad. Suponga en el resto del problema que se dan dichas condiciones.

2. Determine el perfil de velocidad del líquido en el interior del tubo. Tenga en cuenta que la altura de líquido en el depósito puede considerarse constante y despreciable comparada con L, y que la presión es atmosférica en la región del chorro.

3. Determine el caudal Q en función de los datos del problema, $(L, R_0, R_T, \rho, \mu, g)$.

4. Suponiendo conocido el radio del chorro R_∞, determine el perfil de velocidad lejos aguas abajo del final del tubo. Tenga en cuenta que la influencia del aire es despreciable, y que por tanto se cumple que $\partial u/\partial r = 0$ en $r = R_\infty$.

5. Halle la ecuación que determina el radio del chorro desarrollado, R_∞, en función de los datos del problema. Determine también el orden de magnitud de la longitud L_d que necesita la película líquida para alcanzar el radio R_∞ desde el extremo inferior del tubo.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 20

Para bombear un fluido de densidad ρ y viscosidad μ desde una presión p_a a otra mayor $p_a + \Delta p$, se utilizan dos cintas dispuestas como se ilustra en la figura, que moviéndose a velocidades V_1 (inferior) y V_2 (superior) arrastran al fluido. Las cintas tienen una longitud L, una anchura mucho mayor que L en la dirección perpendicular al papel, y están separadas una distancia $h \ll L$. El movimiento del fluido puede considerarse **bidimensional, estacionario, con fuerzas másicas despreciables, y dominado por la viscosidad**. Para el análisis, se aconseja el uso de un sistema de coordenadas cartesianas planas (x, y), siendo x la dirección paralela a las cintas e y perpendicular a las mismas. Tenga en cuenta que los **únicos** datos del problema son $(\rho, \mu, p_a, \Delta p, L, h, V_1, V_2)$. Se pide:

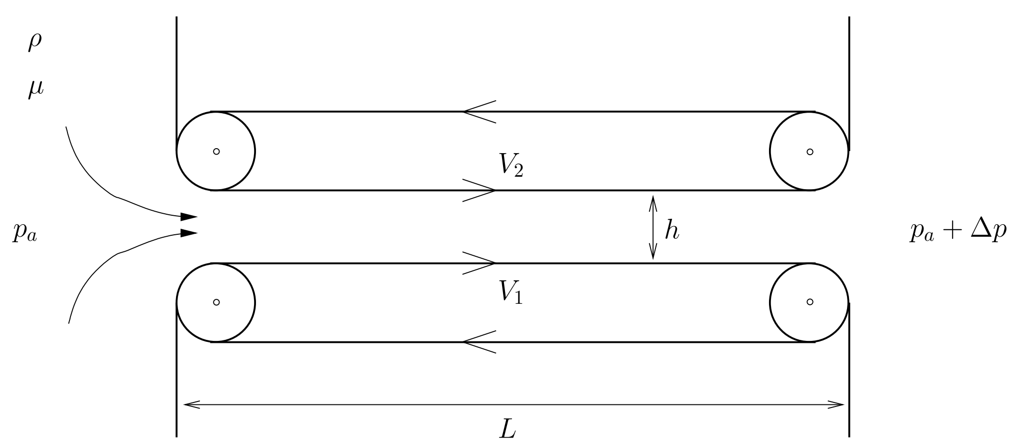
1. Proporcione un criterio para que el movimiento del fluido esté en efecto dominado por la viscosidad. Si hay varias alternativas, coméntelas.

2. Determine el perfil de velocidad del fluido en el interior del canal, $u(x, y)$, así como el caudal q por unidad de envergadura, en función de los datos del problema y del gradiente de presión reducida, P_l.

3. Determine el gradiente de presión reducida, P_l, así como la distribución de presión dentro en el canal, $p(x)$.

4. Halle las fuerzas por unidad de envergadura F_1 y F_2 que es necesario aplicar respectivamente a las cintas inferior y superior para mantener el movimiento, así como la potencia total $\dot{W}$ consumida por el sistema.

5. Sabiendo que la potencia útil entregada al fluido por unidad de envergadura es $q\,\Delta p$, determine el rendimiento η del sistema de bombeo en función de los datos del problema. Estudie los casos particulares $V_1 = V_2$ y $V_1 = 0$, determinando en el último caso el rendimiento máximo.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 21

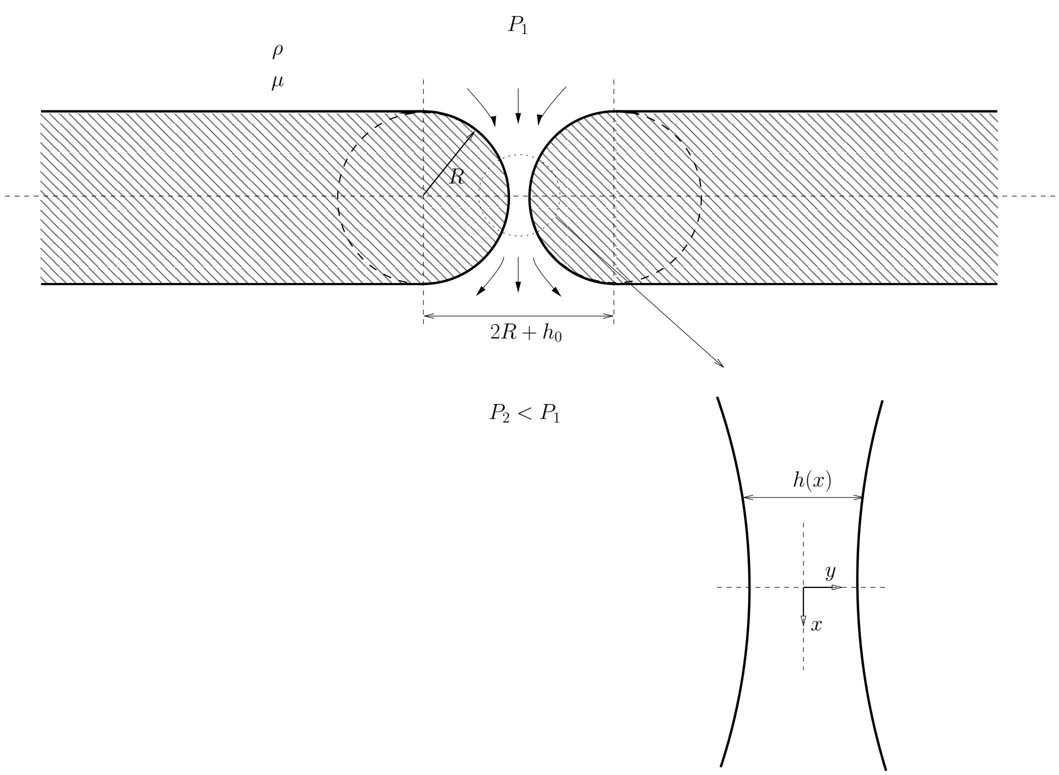
La pared plana de la figura, de espesor $2R$ y anchura $E \gg R$ en la dirección perpendicular al plano del dibujo, separa dos regiones en las que un fluido de densidad ρ y viscosidad μ se encuentra a presiones reducidas P_1 y $P_2 < P_1$. Como muestra la figura, la pared presenta una apertura que conecta ambas regiones, delimitada por dos semicilindros de radio R cuyos centros se encuentran a una distancia $2R + h_0$, con $h_0 \ll R$. Como consecuencia de la diferencia de presiones reducidas a ambos lados de la pared, $P_1 - P_2$, se establece una corriente a través de la ranura, que se desea caracterizar bajo el supuesto de que domine la viscosidad en el movimiento. Para ello, se aconseja el uso del sistema de coordenadas cartesianas (x, y) indicado en la figura.

1. En función de los datos del problema, proporcione el criterio que se debe cumplir para que el movimiento del fluido en la ranura esté en efecto dominado por la viscosidad. Tenga en cuenta que la longitud característica L_c en la dirección x viene determinada por la condición de que el espesor de la ranura, $h(x)$, varíe del orden de sí mismo en distancias del orden de L_c. Estime el orden de magnitud del caudal de fluido que circula por la ranura.

2. Determine el campo de velocidades en la ranura, $u(x, y)$.

3. Halle la distribución de presión reducida en la ranura, $P(x)$. Exprese el resultado en términos de la integral $I(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\xi} (1 + x^2)^{-3}\, dx$.

4. Determine el caudal que circula por la ranura. Para ello, tenga en cuenta que $I(\xi) \to 3\pi/8$ cuando $\xi \to \infty$. Compare con la estimación de orden de magnitud obtenida en el primer apartado.



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 22

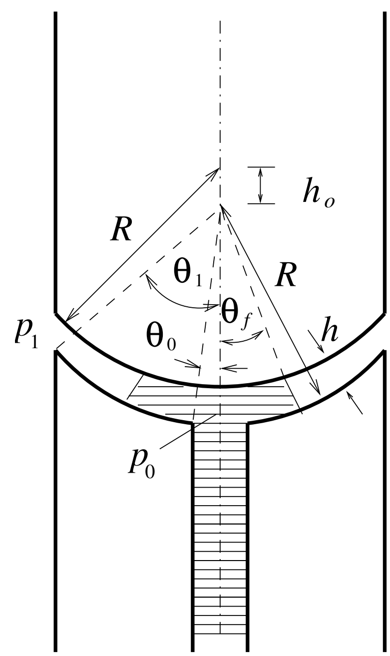
Se pretende estudiar el funcionamiento del sistema de moldeo por inyección de plástico de la figura adjunta, suponiendo que para las condiciones de inyección el plástico puede considerarse un fluido newtoniano de densidad ρ y viscosidad μ constantes. El sistema inyecta plástico en un molde formado por dos casquetes esféricos de radio R y semiángulo θ_1 cuyos centros se encuentran desplazados una longitud $h_o \ll R$. El plastico se inyecta a través de un conducto cilíndrico que desemboca en la cara inferior del molde, ocupando un semiángulo θ_0. El fluido que va llenando el molde forma un frente $\theta_f(t)$ que avanza durante el proceso de inyección desde $\theta = \theta_0$ hasta $\theta = \theta_1$ desplazando el aire que se encuentra inicialmente en el interior del molde. Tanto la presión de inyección p_0 como la presión del aire p_1 se mantienen constantes durante el proceso. Suponiendo que el movimiento está dominado por la viscosidad, se pide:

1. Determinar el campo de presiones en el interior del molde, $p(\theta)$, y el caudal de inyección, Q, cuando el frente se encuentra situado en la posición θ_f, dando las condiciones necesarias para que el proceso esté efectivamente dominado por la viscosidad.

2. Obtener la fuerza vertical que se ejerce sobre la cara superior del molde.

3. Calcular la variación de $\theta_f(t)$ y el tiempo t_i necesario para completar el proceso de inyección.

Nota: $\int \mathrm{sen}^{-1}\theta \cos^{-3}\theta d\theta = \frac{1}{2}\cos^{-2}\theta + \ln(\tan\theta)$



ASPECTOS AVANZADOS EN MECÁNICA DE FLUIDOS

MOVIMIENTO CASI-UNIDIRECCIONAL DOMINADO POR VISCOSIDAD Y LUBRICACIÓN HIDRODINÁMICA

Problema 23

Un cuerpo de forma cilíndrica de radio R y masa M se deposita sobre una capa de líquido de densidad ρ y viscosidad μ, cuyo espesor inicial es $h_0 \ll R$. Debido al efecto de la gravedad el cuerpo comienza a descender, desplazando al líquido hacia el exterior. Sabiendo que el movimiento del líquido está dominado por la viscosidad, se pide:

1. Estimar el orden de magnitud del tiempo de caída, de la velocidad radial del líquido y de las sobrepresiones que se originan en el interior de la capa líquida, dando el criterio que debe cumplirse para que el movimiento del líquido esté en efecto dominado por la viscosidad.

2. Determinar en un instante cualquiera la distribución de presiones y velocidades en el interior de la capa líquida ($0 \leq r < R$) como función del espesor instantáneo $h(t)$.

3. Obtener la ecuación diferencial con condiciones iniciales que determina $h(t)$, y escribirla en forma adimensional, demostrando que el proceso de caída depende de un único parámetro $\Lambda = (3\pi/2)[(\mu R^4)/(M h_0^{5/2} g^{1/2})]$.