

Ejercicios

1.1. Decir si cada una de las siguientes expresiones es cierta o falsa:

a) $\sum_{j=1}^{30} j^4 = \sum_{j=0}^{30} j^4$, b) $\sum_{j=0}^{100} 2 = 200$, c) $\sum_{j=1}^{20} (2 + j^2) = 2 + \sum_{j=1}^{20} j^2$,
d) $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{100} k\right)^2$

1.2. Expresar con notación de sumatorio:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{10 \cdot 11}$,
b) $1 + 40 + 900 + 16\,000 + 250\,000 + 3\,600\,000$,
c) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4$, d) $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$,
e) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$, f) $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5$.

1.3. Sabiendo que $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, hallar la suma de $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)}$.

1.4. Hallar las sumas siguientes ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\sum_{j=1}^n (2j - 1)$. (Usar la igualdad $j^2 - (j - 1)^2 = 2j - 1$, $j \in \mathbb{N}$.)
b) $\sum_{j=1}^n j$. (Apoyarse en a.)

1.5. Probar que

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Escribir el segundo miembro con notación de sumatorio. Esta expresión recibe el nombre de *Fórmula o Identidad Ciclotómica*.

1.6. Deducir de la Identidad Ciclotómica la suma de $\sum_{j=0}^n x^j$, $x \neq 1$. Hacer operaciones en la expresión $(1 - x) \sum_{j=1}^n jx^j$ para deducir la suma de $\sum_{j=1}^n jx^j$, $x \neq 1$. Análogamente en $(1 - x) \sum_{j=1}^n j^2x^j$ para deducir la suma de $\sum_{j=1}^n j^2x^j$, $x \neq 1$.

1.7. Demostrar por inducción las propiedades siguientes ($n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, & \text{b)} \sum_{k=1}^n \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}, \\ \text{c)} \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, & \text{d)} \sum_{j=1}^n ar^{j-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1), \\ \text{e)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}, & \text{f)} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \end{array}$$

1.8. Deducir de las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1 - 4 &= -(1 + 2), \\ 1 - 4 + 9 &= 1 + 2 + 3, \\ 1 - 4 + 9 - 16 &= -(1 + 2 + 3 + 4), \end{aligned}$$

una fórmula general sencilla que incluya las anteriores como casos particulares, y demostrarla mediante el Principio de Inducción Matemática.

1.9. Dado un número $n \in \mathbb{N}$, se define su *factorial* como

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1,$$

y también se define $0! = 1$. Dados dos números $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $m \geq n$, se define el coeficiente binómico “ m sobre n ” como

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Probar las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1, \quad \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m, \\ \text{b)} \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}, \\ \text{c)} \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}. \end{array}$$

1.10. Probar la fórmula del *Binomio de Newton*: para cada $x, y \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

Deducir de ella que:

a) $1 + n + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + 1 = 2^n,$

b) $1 - n + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n = 0.$

1.11. Demostrar que $7^{2n+1} - 48^n - 7$ ($n \in \mathbb{N}$) es divisible por 48.

1.12. Demostrar que $2^{2n} + 15n - 1$ ($n \in \mathbb{N}$) es múltiplo de 9.

1.13 (Desigualdad de Bernouilli).

a) Probar que para todo $x > -1$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

b) Demostrar también que si $n \geq 2$ y $x \neq 0$ la desigualdad anterior es estricta.

1.14. Probar las siguientes desigualdades para $n \in \mathbb{N}$:

a) $n! > 2^{n-1}$ ($n \geq 3$),

b) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2,$

c) $\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} < \sqrt{n} + 1.$

1.15. Sean $x, y > 0$ y para cada $k, n \in \mathbb{N}$, sea

$$\alpha_{k,n} = \sum_{j=0}^n j^k \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

a) Probar, mediante la fórmula del Binomio de Newton, que

$$\alpha_{1,n} = nx(x + y)^{n-1}.$$

b) Hallar $\alpha_{2,n}$. *Sugerencia:* calcular antes

$$\beta_{2,n} = \sum_{j=0}^n j(j-1) \binom{n}{j} x^j y^{n-j}.$$

c) Obtener un procedimiento para calcular $\alpha_{k,n}$ para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$.

1.16 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Probar que si $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right).$$

Deducir que, si $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, entonces $|ac + bd| \leq 1$.

1.17. Sea P_n la propiedad $\sum_{k=1}^n k = \frac{(2n+1)^2}{8}$.

a) Probar que si P_n es cierta, entonces P_{n+1} es cierta.

b) Discutir la afirmación: *se deduce por inducción que P_n es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1.18. Decidir para qué números naturales n es cierta la desigualdad $2^n > n^2$. Demostrarlo por inducción.

1.19. Comparar n^{n+1} y $(n+1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$, y enunciar y demostrar qué desigualdad se verifica entre ambos números.

1.20 (Desigualdad de las Medias). Probar por inducción que si a_1, a_2, \dots, a_n son números reales positivos tales que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, entonces

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n.$$

Deducir de aquí que si x_1, x_2, \dots, x_n son números reales no negativos cualesquiera, entonces

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

es decir, su media aritmética es siempre mayor o igual que su media geométrica.

1.21. Probar que para todo número natural n es $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

1.22. Demostrar que el cardinal del conjunto de las partes de un conjunto que tiene n elementos es 2^n .

1.23. Hallar las soluciones de las desigualdades siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 2x^2 + 9x + 6 \geq x + 2, & \text{b) } x + \frac{1}{x} < 1, & \text{c) } \frac{x}{x+5} < 0, \\ \text{d) } \frac{3x^2 - 1}{1 + x^2} > 0, & \text{e) } \frac{2x - 1}{3x + 2} \leq 1, & \text{f) } \frac{2x^2 + 9x + 6}{x + 2} \geq 1, \\ \text{g) } \frac{x^2 - 4x + 4}{1 + x^3} > 0, & \text{h) } \frac{x - 1}{3x + 4} \leq \frac{3x + 2}{x}. \end{array}$$

1.24. Resolver las ecuaciones:

a) $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$, b) $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}$,
 c) $|(x^2 + 4x + 9) + (2x - 3)| = |x^2 + 4x + 9| + |2x - 3|$,
 d) $|x - 1||x + 1| = 0$, e) $|x - 1||x + 2| = 3$.

1.25. Resolver las siguientes desigualdades:

a) $|x - 1| + |x + 1| < 1$, b) $|x - 5| < |x + 1|$, c) $|3x - 5| < 3$,
 d) $|x^2 - 1| < 1$, e) $|x^2 - x + 1| > 1$, f) $1 < |x - \frac{1}{2}| < 2$,
 g) $x - |x| > 2$, h) $|x^2 - x| + x > 1$, i) $|x + |x - 1|| < 2$,
 j) $\frac{1}{1 + |x - 1|} < |x - 2|$, k) $-1 \leq \frac{|x^3 - 1|}{x - 1} \leq 2$.

1.26. Estudiar para qué números reales se cumple:

a) $\frac{|x| + 1}{x} < 1$ y $\frac{-2|x| + 1}{x} < 1$, b) $|2x - |2x - 1|| = -5x$.

1.27. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $|x| \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x = 0$. ¿Qué números reales x cumplen que $x \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$?

1.28. Calcular el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes conjuntos, indicando si son máximo o mínimo respectivamente:

a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, b) $\{\frac{2n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
 c) $\{n \pm \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, d) $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{x-5} > 7\}$,
 e) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, f) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
 g) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} \mid n^2x^2 - n(3n-1)x + (2n^2 - 3n - 2) = 0\}$,
 h) $\{(-1)^n \frac{n^2+1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 < 0\}$,
 j) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}$, k) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$,
 l) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, m) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, n) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

1.29. Sea A un conjunto, $s = \sup A$ y $\varepsilon > 0$. ¿Se puede asegurar que existe algún $a \in A$ tal que $s - \varepsilon < a < s$? En caso afirmativo, demostrarlo. En caso negativo, dar un contraejemplo y modificar las desigualdades anteriores para que sea cierto.

1.30. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, acotados, de números reales.

a) Demostrar que si $A \subset B$, entonces

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf A \geq \inf B.$$

b) Probar que si $x \leq y$ para todos los $x \in A, y \in B$, entonces

$$\begin{aligned} \sup A &\leq y && \text{para todo } y \in B, \\ x &\leq \inf B && \text{para todo } x \in A, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\sup A \leq \inf B$.

c) Demostrar que si $\sup A < \inf B$, entonces $a < b$ para todos los $a \in A, b \in B$. Justificar si es cierto el recíproco.

1.31.

a) Sean A y B dos conjuntos acotados de números reales. Definimos el conjunto

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Demostrar que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

b) Sean $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}, B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathbb{R}$, y consideremos el conjunto

$$C = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\}.$$

Demostrar que

$$\sup C \leq \sup A + \sup B, \quad \inf C \geq \inf A + \inf B.$$

Dar algún ejemplo que muestre que las desigualdades pueden ser estrictas.