Ondas electromagnéticas en el vacío

1.- A partir de las ecuaciones Maxwell, demuestre cualitativamente que para generar una onda electromagnética de frecuencia ω se necesitan cargas o corrientes que oscilen a esa misma frecuencia.

2.- Señale algunas diferencias entre ondas luminosas, ondas sonoras, y ondas en la superficie de un líquido.

3.- Diga si las siguientes ondas son armónicas o no:
a) $E = A\cos^2(wt-\delta)$, b) $E = A\sin(wt-\delta)$, c) $E = A\cos(2wt-\delta)$, d) $E = A\exp\left[\cos(wt-\delta)\right]$, e) $E = A\cos(wt)$ f) $E = A\cos(wt^2)$.

4.- ¿El siguiente campo eléctrico puede ser una onda electromagnética? $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 \cos\left[k(y+z)-\omega t\right]$, donde $\mathbf{E}_0 = (1,\ 1,\ 0)'$.

5.- Usando la primera ecuación de Maxwell demuestre que el vector $\vec{E}_0$ no puede ser constante para la onda esférica $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(k|\vec{r}|-\omega t)}/|\vec{r}|$.

6.- El campo eléctrico de una onda electromagnética viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left[\frac{k}{2}\vec{r}\cdot(\vec{u}_1-\vec{u}_2)\right]\cos\left[\omega t-\frac{k}{2}\vec{r}\cdot(\vec{u}_1+\vec{u}_2)\right]$$

($\vec{E}_0$ real) donde $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son dos vectores unitarios constantes y $k=\omega/c$. Se pide: a) ¿Es una onda armónica? b) Calcular su representación compleja. c) Calcular su velocidad de fase. d) Expresar $\vec{E}(\vec{r},t)$ como superposición de ondas planas.

7.- Ponga un ejemplo de onda armónica "plana" inhomogénea $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_c\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $\vec{k}_c = \vec{k} + i\vec{a}$, en la que $\vec{E}_0$ no sea perpendicular ni a $\vec{k} = (k,0,0)$ ni a $\vec{a} = (0,a,0)$.

8.- Demuestre que el lugar geométrico de los puntos que a tiempo fijo tienen el mismo valor del campo eléctrico en representación real para la onda "plana" inhomogénea $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_c\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $\vec{k}_c = \vec{k} + i\vec{a}$ con $\vec{k} = (k,0,0)$ $\vec{a} = (0,a,0)$ no es un plano si $a \neq 0$.

9.- Para una onda armónica demuestre que: (a) El vector $\vec{E}\times\dot{\vec{E}}$ es constante (b) $\vec{E}\cdot\left(\vec{E}\times\dot{\vec{E}}\right) = 0$.Ayudas: tenga en cuenta que $\ddot{\vec{E}} = -\omega^2\vec{E}$, y haga el cálculo en representación real (¿sabría decir por qué?). Estas dos relaciones demuestran que para una onda armónica $\vec{E}$ está siempre en un plano.

10.- Consideremos el campo eléctrico $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_0 \mathrm{sen}(\omega t - kz)\vec{u}_y$ siendo $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ los correspondientes vectores unitarios. ¿Es una onda armónica? Escribir $\vec{E}$ en representación compleja. ¿Es una onda plana? ¿Cuál es su estado de polarización?

11.- Para cierta onda armónica plana $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$ las componentes cartesianas de $\vec{E}_0$ son $E_{0x} = p + iq$, $E_{0y} = f + ig$ y $E_{0z} = 0$, con p, q, f y g reales. Decir el estado de polarización de la onda en los siguientes casos: a) $f = 2p$, $g = 2q$. b) $f = q = 0$, $p = g$. c) $p = q = 0$.

12.- (a) Demuestre que para una onda armónica y plana el estado de polarización es el mismo en cualquier punto del espacio. (b) Para la onda $\vec{E} \propto e^{-i\omega t}\left(e^{ikx}, e^{iky}, 0\right)$ demuestre que hay puntos con polarización circular y puntos con polarización lineal.

13.- Teniendo en cuenta que para una onda armónica y plana $\vec{B} \propto \vec{k} \times \vec{E}$ demuestre que el estado de polarización de $\vec{B}$ es el mismo de $\vec{E}$ pero rotado un cierto ángulo. Considere $\vec{k} = (0,0,k)$.

14.- Razone cuál es el estado de polarización de la onda $\vec{E} = E_0\left(\cos(kz), \mathrm{sen}(kz), 0\right)\cos(\omega t)$ con $k = \omega / c$. Especifique cómo varía el estado de polarización al cambiar z.

15.- Considere campos $\vec{B}$ y $\vec{E}$ estáticos. ¿Puede ser el vector de Poynting no nulo?¿Significa eso que hay flujo de energía?

16.- Estime la amplitud del campo eléctrico de una onda armónica plana cuyo promedio temporal del vector de Poynting es a) $125W/m^2$ (bombilla). b) $1KW/m^2$ (luz solar). c) $1W/cm^2$ (láser continuo He-Ne). d) $1MW/cm^2$ (láser pulsado).

17.- Halle el valor instantáneo del vector de Poynting $\vec{S}$ de la onda electromagnética en el vacío cuyo campo eléctrico viene dado por $\vec{E} = Re\,[E_0(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)e^{i(kz-\omega t)}]$.

18.- Se tiene una onda electromagnética plana y monocromática propagándose en el vacío. Sabiendo que la onda se mantiene constante sobre los planos perpendiculares al vector $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ y que el campo magnético tiene la dirección del eje z, se pide expresar los vectores: a) Campo eléctrico y magnético. b) Promedio temporal del vector de Poynting.

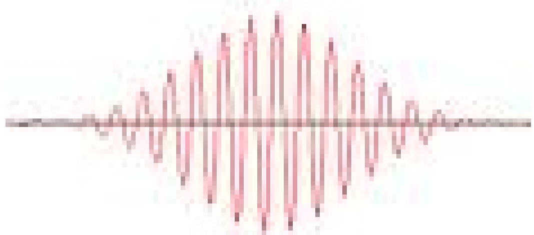
Otros enunciados

19.- Razone si para una onda circularmente polarizada se pueden definir frentes de onda.

20.- Cierta onda se describe por la expresión $\vec{V}(z,t)=\vec{V}_0 e^{-i(az^2+bt^2+2\sqrt{ab}zt)}$. ¿Es una onda plana? ¿Es armónica? ¿Cuál es la velocidad de propagación de las superficies donde $\vec{V}$ toma un mismo valor?

21.- Considere un paquete de ondas Gausssiano de la forma

$$E(t)\propto\int d\omega \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2}\right]\exp(-i\omega t)$$



determine el valor de la anchura espectral σ para que la onda tenga una duración del orden de 1 s.

22.- a)Sea una onda armónica plana que se propaga en la dirección $\vec{k}=(0,0,1)$ y tiene una frecuencia ω. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico? ¿y del campo magnético? ¿Existe algún grado de libertad? b) Idem para $\vec{k}=(0,1,1)$.

23.- Escríbase en representación compleja una onda propagándose en el eje x con las siguientes polarizaciones: a) circularmente polarizada, b) linealmente polarizada formando el campo 45 grados con los ejes cartesianos YZ y c) elípticamente polarizada.

24.- Sean dos ondas planas con la misma polarización, longitud de onda y amplitud, pero que se propaga en diferentes direcciones. La suma de las dos ondas, por la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, también es una solución, a) ¿Es una onda armónica? b) Calcular la amplitud c) Calcular la velocidad de fase

25.- a) La suma de dos ondas planas, ¿es siempre una onda plana? b) La superposición de dos ondas linealmente polarizadas y viajando en la misma dirección ¿está siempre linealmente polarizada? c) La superposición de dos ondas circularmente polarizadas y viajando en la misma dirección, ¿está siempre circularmente polarizada?

26.- Escríbanse los campos eléctricos y magnéticos de las siguientes ondas planas monocromáticas que se propagan en el vacío: (a) Linealmente polarizada a 30º del eje X propagándose a lo largo del eje Z. (b) Elípticamente polarizada propagándose según el eje Y. El eje mayor de la elipse está según el eje Z y su longitud es doble que la del eje menor. (c) Circularmente polarizada propagándose en la dirección del eje X.

27.- Consideremos dos ondas planas monocromáticas linealmente polarizadas que se propagan en la misma dirección. Determinar el promedio temporal del vector de Poynting de la superposición de ambas ondas si las dos ondas tienen la misma frecuencia y los vectores $\vec{E}$ perpendiculares.

28.- El campo eléctrico correspondiente a una onda plana monocromática propagándose en la dirección Z tiene la forma $\vec{E} = A_1 \sin(\omega t - kz)\vec{u}_x + A_2 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_y$, donde $A_{1,2}$ son constantes $\vec{u}_{x,y}$ son vectores unitarios constantes en la dirección de los ejes X e Y respectivamente. a) Calcúlese el promedio temporal del vector de Poynting de dicho campo. b) Demuéstrese que $\vec{E}$ puede escribirse como la superposición de dos campos, uno de ellos linealmente polarizado y el otro circularmente polarizado. Escríbanse las expresiones para ambos campos.