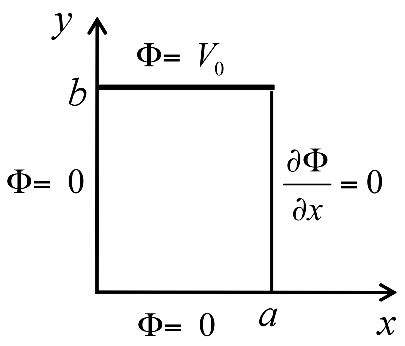
Electromagnetismo II - curso 2014/15 - Grupo D

Entregable I - Problemas Electrostáticos

Un bloque conductor, de dimensiones a, b y una longitud muy grande en la dirección del eje z, tiene una ranura rectangular cubierta por una placa que está aislada del bloque. Sobre las paredes se establecen las condiciones de contorno que se muestran en el corte transversal de la ranura. Hallar la distribución de potencial en el interior de la misma.



Es un problema electrostático en coordenadas cartesianas. Tenemos que resolver la ecuación de Laplace para unas condiciones de contorno determinadas. Resolvemos por separación de variables. Tendremos: $\phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$. El problema no tiene dependencia en la coordenada z, así que la solución se reduce a $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$.

Empezamos a mirar las condiciones de contorno en el eje x. Tenemos que: $\phi(0,y) = 0$ para $0 \leq y \leq b$. Esto nos invita a probar una solución del tipo: $X(x) = A\sin(\alpha x)$. Además, para determinar los posibles valores de α tenemos la condición de contorno:

$$\frac{\partial \phi(a,y)}{\partial x} = 0 \qquad 0 \leq y \leq b$$

Esto impone una nueva condición sobre X(x). Derivando y sustituyendo $x = a$ tenemos:

$$A\alpha\cos(\alpha a) = 0 \rightarrow \alpha = \frac{(2n+1)\pi}{2a}$$

Por tanto, podemos ir dando forma a la solución general, teniendo en cuenta que, como $\gamma = 0$, $\alpha = \beta$:

$$\phi(x,y) = \sum_{\alpha} A\sin(\alpha x)\left(Be^{\alpha y} + B'e^{-\alpha y}\right)$$

Nos fijamos ahora en las otras condiciones de contorno. Tenemos: $\phi(x,0) = 0$ para $0 \leq y \leq a$. Si sustituimos, tenemos que:

$$\phi(x,0) = \sum_{\alpha} A \sin(\alpha x) \left(B + B'\right) = 0 \to B = -B'$$

Reescribiendo y agrupando constantes:

$$\phi(x,y) = \sum_{n} C_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} y\right)$$

Por último, tenemos que calcular los coeficientes C_n, para lo que utilizamos la última condición de contorno y la estrategia que hemos utilizado en clase. La condición de contorno que nos queda por utilizar es $\phi(x,b) = V_0$ para $0 \leq y \leq a$. Sustituyendo en la solución anterior:

$$\sum_{n} C_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} b\right) = V_0$$

Siguiendo la estrategia utilizada en clase, multiplicamos por $\sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2a} x\right)$ e integramos:

$$\sum_{n} C_n \sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} b\right) \int_0^a \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} x\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2a} x\right) = V_0 \int_0^a \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2a} x\right) dx$$

$$C_m \sinh\left(\frac{(2m+1)\pi}{2a} b\right) \frac{a}{2} = \frac{2aV_0}{(2m+1)\pi}$$

$$C_m = \frac{4V_0}{(2m+1)\pi \sinh\left(\frac{(2m+1)\pi}{2a} b\right)}$$

Y sustituyendo en la solución, tenemos la solución final del problema:

$$\boxed{\phi(x,y) = \sum_{n} \frac{4V_0}{(2n+1)\pi \sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} b\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2a} y\right)}$$