Soluciones Hoja 5. Pedro Balodis

Problema 1. (hecho en teoría)
Problema 2. Diferenciabilidad de f en los puntos $x = -1, 0, 3$, con

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -1 \\ 0, & -1 \le x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Solución: Si $x = -1$, tenemos

$$\lim_{x \to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1-} \frac{x+1}{x+1} = 1; \ \lim_{x \to -1+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1+} \frac{0}{x+1} = 0 \Rightarrow \nexists f'(-1)$$

Si $x = 0$, tenemos

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{0}{x} = 0; \ \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^2}{x} = 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

Si $x > 0$, claramente existe $f'(x) = 2x$, y en particular, para $x = 3$.
Problema 3. Probar que si existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \le x^2$, existe $f'(0)$ y calcularlo.

Solución: Tenemos claramente $f(0) = 0$, luego para $0 < |x| < \delta$,

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - 0 \right| \le |x| \to 0, \ x \to 0 \Leftrightarrow \exists f'(0) = 0$$

Problema 4. Probar, usando la definición, que:

a) Las funciones $f(x) = (x^2|x| + 1)^{-1}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}\,(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ cumplen $f'(0) = g'(0) = 0$.

Solución: Para g, es consecuencia inmediata del Problema 3, mientras que para f, dado $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{1}{x} \frac{-x^2|x|}{x^2|x| + 1} = -\frac{x|x|}{x^2|x| + 1} \to 0, \ x \to 0 \Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

b) La función $h(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ no es derivable en $x = 0$ (aunque sí que es continua en $x = 0$):

Solución: Para $x \neq 0$,

$$\frac{h(x) - h(0)}{x} = \mathrm{sen}\,(1/x); \ \nexists \lim_{x \to 0} \mathrm{sen}\,(1/x) \Rightarrow \nexists h'(0)$$

b) $f(x) = \ln(e^{5x}+1)$; $f'(x) = \dfrac{5e^{5x}}{e^{5x}+1}$

c) $f(x) = (x+2^x)e^x = (x+e^{x\log 2})e^x$; $f'(x) = (1+\log 2\cdot 2^x)e^x + (x+2^x)e^x$

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}} = x(100-x^2)^{-1/2}$; $f'(x) = (100-x^2)^{-1/2} + (100-x^2)^{-3/2}x^2$

e,f) (superan mi paciencia)

Problema 6. ¿Qué es $(fg)^{(3)}$? ¿y $(e^f)''$?.

Solución:

$$\begin{aligned}(fg)^{(3)} = (fg)''' &= [(fg)']'' \\ &= [f'g+g'f]'' \\ &= [f''g+2f'g'+fg'']' \\ &= f'''g+3f''g'+3f'g''+g'''\end{aligned}$$

[Nota: En general, para $k = 0, 1, 2, \ldots$, $(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} f^{(j)}g^{(k-j)}$, que puede probarse por inducción, usando que $\binom{k+1}{j} = \binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}$ (fórmula de Pascal)]

$$\begin{aligned}(e^f)'' &= [e^f f']' \\ &= e^f[(f')^2+f'']\end{aligned}$$

Problema 7. La fórmula de la *derivación logarítmica* afirma que $f'(x) = f(x)(\log f(x))'$ (*a priori*, la fórmula es válida si f es diferenciable y es > 0, pero a menudo se aplica omitiendo ésa última restricción). Usarla para calcular:

a) Las derivadas de:

- $f(x) = (x^2+1)^7(e^x+1)(\cos x + \operatorname{sen} x)$:

$$\log f(x) = 7\log(x^2+1) + \log(e^x+1)\log(\cos x+\operatorname{sen} x)$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{14x}{x^2+1} + \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}\right]$$

- $g(x) = (x^2+1)^{x^2+1}$:

$$\log g(x) = (x^2+1)\log(x^2+1)$$

$$g'(x) = g(x)\left[2x\log(x^2+1)+2x\right]$$

b) Derivar $f_1(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x)$:

Solución:

$$\log\left(\prod_{j=1}^{n} f_j(x)\right) = \sum_{j=j}^{n}\log f_j(x) \Rightarrow \left[\log\left(\prod_{j=1}^{n} f_j(x)\right)\right]' = \sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(x)'}{f_j(x)} \quad (1)$$

La fórmula (2) obtenida, en principio sólo sería válida si $f_1, \ldots, f_n$ son diferenciables y > 0, pero tiene sentido sólo con que $f_1, \ldots, f_n$ sean diferenciables, y de hecho es válida también en ése caso (una vez obtenida la fórmula, puede probarse, por ejemplo, por inducción en el número de factores).

Problema 8. Determinar rectas tangentes r a las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(e + \operatorname{sen} x)$, $x = 0$: **Solución:** $r \equiv y = (1 + e^{-1})x + 1$.

b) $g(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$, $x = \pi/6$: **Solución:** $r \equiv y = \sqrt{3}(x - \pi/6) + 1/2$.

Problema 9. Determinar dónde la recta tangente r a la gráfica de $f(x) = x^2$ en x_0 (arbitrario) corta el eje real:

Solución: Es inmediato que $r \equiv y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2 = x_0(2x - x_0)$, luego $y = 0 \Leftrightarrow x = x_0/2$, $x_0 \neq 0$ (si $x_0 = 0$, $r \equiv y = 0$).

Problema 10. Determinar $a \in \mathbb{R}$ parámetro para que, con función $f(x) = x^2 - 5ax$ la recta r tangente a su gráfica en el origen sea:

a) Horizontal: **Solución:** Puesto que $f'(x) = 2x - 5a$, $f'(0) = 5a$, luego $f'(0) = 0 \Rightarrow a = 0$.

b) Tenga pendiente -1: **Solución:** Puesto que $f'(0) = 5a$, luego $f'(0) = -1 \Rightarrow a = -1/5$.

Problema 11. Considerando la recta tangente r a $f(x) = e^x$ en $x = 0$, probar la desigualdad $e^x \geq 1 + x \, \forall x$:

Solución: Es inmediato que $r \equiv y = x + 1$, por lo cual, la interpretación geométrica de ésa desigualdad es que la gráfica de e^x se mantiene siempre por encima de ésa tangente. Para probar ése hecho, consideramos $g(x) = e^x - 1 - x$. Ésta función es diferenciable con $g(0) = 0$, $g'(x) = e^x - 1$, luego, como $e^x > 1$, $x > 0$, $0 < e^x < 1$, $x > 0$, $g' > 0$ en $(0, \infty)$, luego g es creciente en $[0, \infty)$ y $g(x) \geq g(0) = 0$, $x \geq 0$. Asimismo, $g' < 0$ en $(-\infty, 0)$, luego g es decreciente en $(-\infty, 0]$ y $g(x) \geq g(0)$, $x \leq 0$. En ambos casos, $g(x) \geq 0 \, \forall x$.

Problema 12. Considerando la fórmula

$$1 + x + \ldots + x^n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \; x \neq 1$$

encontrar fórmulas para:

a) $x + 2x^2 \ldots + nx^n = \sum_{j=1}^{n} jx^j$:

Solución: Derivando la fórmula anterior, obtenemos

$$\left(\sum_{j=0}^{n} x^j \right)' = \sum_{j=1}^{n} jx^{j-1} = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}, \; x \neq 1 \quad (1)$$

Pero

b) $1^2 + 2^2x + \ldots + n^2x^n = \sum_{j=1}^{n} j^2x^j$:

Solución: Derivando la fórmula de a), obtenemos

$$\left(\sum_{j=0}^{n} jx^j\right)' = \sum_{j=1}^{n} j^2x^{j-1} = \left(\frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}\right)'$$

que tras cierto trabajo, puede expresarse como

$$\sum_{j=1}^{n} j^2x^{j-1} = \frac{n^2x^{n+2} - (2n^2+2n-1)x^{n+1} + (n+1)^2x^n - x - 1}{(x-1)^3}, \; x \neq 1 \qquad (3)$$

de dónde

$$\sum_{j=1}^{n} j^2x^{j} = \frac{n^2x^{n+3} - (2n^2+2n-1)x^{n+2} + (n+1)^2x^{n+1} - x^2 - x}{(x-1)^3}, \; x \neq 1 \qquad (4)$$

En particular, para $x = 2$, obtenemos $\sum_{j=1}^{n} j^2 2^j = (n^2+1)2^{n+2} - 6$, $n \in \mathbb{N}$ (de igual modo, para $|x| < 1$, obtenemos que la suma de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} j^2x^j$ es $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$).

Problema 13. Las funciones $f(x) = \operatorname{arcsen} x$, $\arccos x$ se consideran como funciones de $(0,1)$ en $(0, \pi/2)$. Sabiendo que $f'(x) = -g'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, obtener una relación para $f+g$:

Solución: Como entonces $(f+g)' = 0$, $f+g$ es constante. Evaluando en $x = 1/2$ obtenemos la fórmula:

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \; 0 < x < 1 \qquad (1)$$

(<u>Observación:</u> Como f y g son continuas en $[-1,1]$ y diferenciables en $(-1,1)$, lo mismo vale para su suma $f+g$, y como $(f+g)' = 0$ en $(-1,1)$, f es constante en $[-1,1]$ y deducimos que (1) en realidad es válida en $[-1,1]$).

Problema 14. Si $f(x) = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, f se denomina *seno hiperbólico* y su inversa $f^{(-1)}$ *arcoseno hiperbólico*. Hay que ver que tal inversa está bien definida con $(f^{(-1)})(x)' = (1+x^2)^{-1/2}$:

Solución 1: Como $f(x)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, f continua y estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, y como claramente $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (basta verlo con $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pues f es claramente impar, y para ello, escribimos $f(x) = \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{\to\infty, x\to\infty} \underbrace{(1-e^{-2x})}_{\to 1, x\to\infty} \to \infty$, $x \to \infty$), de dónde por la continuidad de f y el Teorema de Valores Intermedios (para funciones continuas), f es una biyección continua de $\mathbb{R}$ en sí mismo, de dónde tiene una inversa bien definida $f^{(-1)}(x) :=$ arcsenh x, que es además diferenciable, pues $f'(x) \neq 0\, \forall x$, y la derivada de su inversa

Puesto que $\cosh t > 0$, $\forall t$, se sigue de (3) que $\cosh(\operatorname{arcsenh} x) = \sqrt{1+x^2}$, de dónde

$$(\operatorname{arcsenh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ \forall x$$

Solución 2: Usando que $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x} = \dfrac{(e^x)^2-1}{2e^x}$, si escribimos $y = f(x)$,

$$y = \frac{(e^x)^2-1}{2e^x} \Leftrightarrow (e^x)^2 - (2y)e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = y \pm \sqrt{1+y^2} \qquad (4)$$

Si en (4) tomáramos la solución $y - \sqrt{1+y^2}$, tendríamos $e^x < 0$, lo cual es absurdo, luego $e^x = y + \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$. Por tanto, cambiando los papeles de x e y,

$$\operatorname{arcsenh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) \qquad (5)$$

Derivando (5), inmediatamente se obtiene la fórmula del ejercicio.

Problema 15. Hallar una fórmula para la derivada segunda de una función inversa.

Solución: Primero de todo, hay que especificar algo más las hipótesis sobre f. Suponiendo $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$, primero de todo no podemos esperar que su inversa tenga dos derivadas sin que la propia f las tenga, luego supondremos:

i) f'' está bien definida en (a,b).

ii) $f' \neq 0$ en (a,b).

(sin la condición ii), no podemos esperar que $f^{(-1)}$ sea diferenciable, si es que existe, y en cuanto a que esté definida en un intervalo abierto, es más conveniente porque la condición "si $x \in (a,b)$, $\exists \delta > 0$ con $(x-\delta, x+\delta) \subset (a,b)$ se cumple en todos sus puntos). Veamos que si cumplen ésas condiciones mínimas, $f^{(-1)}$ está bien definida y tiene dos derivadas:

Puesto que $f''(x)$ existe en todo x de (a,b), éso garantiza que f' es continua en todo x de (a,b). Como además $f' \neq 0$, por el Teorema de Bolzano, f' debe tener signo constante ($f' > 0$ en (a,b) o $f' < 0$ en (a,b), pues si no fuera así, existiría $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) = 0$, en contra de la hipótesis $f' \neq 0$). Entonces f ha de ser estrictamente monótona, y siendo continua éso garantiza que f es una biyección entre (a,b) y $(c,d) = f((a,b))$. Por tanto, por el Teorema de la Función inversa, $f^{(-1)} : (c,d) \mapsto (a,b)$ es diferenciable con

$$f^{(-1)}(x)' = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(x))} \Leftrightarrow (f^{(-1)})' = [f' \circ f^{(-1)}]^{-1} \qquad (1)$$

Por el Teorema de continuidad de funciones compuestas y por existir f'', la función $(f^{(-1)})'$ es derivable, y aplicando la Regla de la Cadena (varias veces seguidas),

$$\begin{aligned}(f^{(-1)})'' &= \left\{[f' \circ f^{(-1)}]^{-1}\right\}' \\ &= -[f' \circ f^{(-1)}]^{-2}[f' \circ f^{(-1)}]'\end{aligned}$$

Problema 16. Éste problema trata de explicar el procedimiento aproximado para encontrar soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = 0$ llamado *Método de Newton* o también *Regula Falsi* (falsa regla), que consiste, si partimos de un punto x_0 que pensamos que está cerca de una solución de $f(x) = 0$, aproximar f por la recta tangente a f en x_0 y como siguiente punto x_1 tomamos dónde corta ésa tangente el eje X (del uso de tal aproximación viene la denominación *Regula Falsi*), y así sucesivamente.

a) Comprobar que la sucesión de puntos x_n está dada por la fórmula de recurrencia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n \geq 0 \qquad (1)$$

Solución: Basta verlo con $n = 0$, y la recta r tangente a f en x_0 es $r \equiv y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, luego si $y = 0$ obtenemos

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

(**Observación:** La relación de recurrencia dada por (1) puede expresarse como $x_{n+1} = \Psi(x_n)$, $n \geq 0$, siendo $\Psi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Es inmediato comprobar que si x_0 es una solución de $f(x) = 0$, $x_1 = \Psi(x_0) = x_0$, o lo que es lo mismo, x_0 es un punto fijo de Ψ).

b) Explicar porqué cabe imaginar que éste procedimiento da rápidamente "buenas aproximaciones" a la solución de la ecuación $f(x) = 0$.

b.1) Podemos considerar una primera situación dónde f se comporte como una potencia $a(x - c)^k$, $a \neq 0$ (con $k = 1, 2, \ldots$, que da posibles órdenes de tangencia de f al eje X en el punto $x = c$ dónde se anula). En éste caso, si partimos de un $x_0 \neq c$, la función Ψ de a) viene dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= \Psi(x_0) = x_0 - \frac{a(x_0 - c)^k}{ka(x_0 - c)^{k-1}} = x_0 - \frac{x_0 - c}{k} \\ &= c + \left(1 - \frac{1}{k}\right)(x_0 - c) \qquad (1) \end{aligned}$$

Iterando éste esquema, obtenemos de (1)

$$x_n = c + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n (x_0 - c),\ n \geq 1 \qquad (2)$$

y (2) implica claramente de $x_n \to c$, $n \to \infty$, pues $0 < 1 - 1/k < 1$ (de hecho obtenemos convergencia de velocidad "geométrica", aunque tanto peor cuando mayor sea el orden de tangencia de f en $x = c$, salvo en el caso $k = 1$, que da directamente la solución exacta tras la primera iteración).

que $f'(c) \neq 0$. Éso garantiza que en $(c-\delta, c+\delta)$ $\Psi(x)$ está bien definida, tenemos claramente $\Psi(c) = c$ y

$$\begin{aligned}\Psi'(x) &= 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\end{aligned}$$

de dónde Ψ' está bien definida y es continua en $(c-\delta, c+\delta)$ con $\Psi'(c) = 0$. Según veremos cuando estudiemos Polinomios de Taylor, ésto garantiza que existen constantes $\delta' \in (0, \delta]$ y $C > 0$ tales que si

$$|x - c| < \delta' \Rightarrow |\Psi(x) - c| \leq C(x-c)^2 \qquad (1)$$

Supongamos además que partimos de un punto inicial x_0 bastante próximo a $x = c$. Entonces (1) implica que podemos garantizar eligiendo de partida un $\delta > 0$ lo bastante pequeño, que siempre que

$$x_0 \in (c-\delta, c+\delta) \Rightarrow |x_1 - c| = |\Psi(x_0) - c| < \min\{1, |x_0 - c|\}$$

Veamos entonces que partiendo de la aproximación inicial x_0, las sucesivas x_n no sólo convergen a c, sino que lo hacen "de forma ultrarrápida": ante todo, como $|x_1 - c| < |x_0 - c|$, $x_1 \in (c-\delta, c+\delta)$, y

$$|x_2 - c| = |\Psi(x_1) - c| \leq C(x_1 - c)^2,\ |x_3 - c| = |\Psi(x_2) - c| \leq C(x_2 - c)^2 \leq C^2(x_1 - c)^{2^2}$$

Continuando ése proceso n pasos,

$$|x_{n+1} - c| \leq C^n |x_1 - c|^{2^n},\ n = 1, 2, \ldots \qquad (2)$$

Puesto que $|x_1 - c| < 1$, entonces $C^n|x_1 - c|^{2^n} \to 0$, $n \to \infty$, pero no sólo éso, sino que mientras que en una convergencia geométrica del tipo $|x_n - c| \leq Cr^n$, $0 < r < 1$ el número de cifras decimales correctas de las sucesivas aproximaciones x_n de $x = c$ crecen linealmente con n, en la aproximación anterior tal número de cifras correctas crece geométricamente con n; a tal tipo de fenómeno se le suele denominar "superconvergencia".

Sin embargo no todo son ventajas con el método de Newton: si estamos de partida cerca de una solución y se cumplen las condiciones mencionadas, éste proceso permite encontrar aproximaciones sucesivas de manera muy eficaz, pero si la ecuación $f(x) = 0$ tiene varias soluciones, se puede ver fácilmente que $\Psi(x)$ no va a estar siempre bien definida (a consecuencia del Teorema de Rolle, f' se ha de anular entre dos soluciones de la ecuación $f(x) = 0$), y además aún si partiendo de diferentes puntos iniciales x_0 las sucesivas aproximaciones x_n convergen, pueden hacerlo a valores diferentes (en tal caso, a diferentes soluciones de la ecuación $f(x) = 0$). Por ello, también es necesario poder contar con procedimien-

$[a, b]$ y sus valores $f(a)$, $f(b)$ son no-nulos de signos opuestos, existe $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$):

Supongamos $f(a) < 0 < f(b)$. Dividimos $I_1 = [a, b] = [a_1, b_1]$ en dos mitades $I_1^2 = [a, \dfrac{a+b}{2}]$, $I_2^2 = [\dfrac{a+b}{2}, b]$. Si $f(\dfrac{a+b}{2}) = 0$, ya tenemos una solución c de $f(x) = 0$ en (a, b), y si no es así, o bien en I_1^1 o en I_2^1 f tiene valores no-nulos y de signos opuestos en los extremos. Denominando I_2 al correspondiente intervalo dónde se cumpla tal cosa, si $I_2 = [a_2, b_2]$, procedemos como antes a dividir I_2 en dos mitades $I_1^3 = [a_1, \dfrac{a_1 + a_2}{x}]$, $I_2^3 = [\dfrac{a_1 + b_1}{2}, b_2]$ y de nuevo, en uno de ésos dos intervalos (que denominaremos I_3; $I_3 \subset I_2 \subset I_1$) la función bien se anula en uno de sus extremos, o bien toma valores no-nulos y de signos opuestos en ellos. Prosiguiendo éste proceso n pasos, o bien acabamos localizando un punto $x_n \in (a, b)$ dónde $f(x_n) = 0$, o si el proceso continúa indefinidamente, producimos una sucesión de puntos $x_n \in I_n$ con $[a, b] = I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$. Como $long(I_n) = 2^{n-1}(b-a) \to 0$ y los intervalos I_n están encajados, la sucesión $s = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente a cierto $x_0 \in (a, b)$. Puesto que f continua en x_0 garantiza $f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$, tenemos

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=0,\, \forall n}, \;\; f(x_0) = 0$$

y por tanto, x_0 es una solución de la ecuación $f(x) = 0$.

Problema 17. Aproximar las soluciones de $3t - 4t^3 = 1/2$, $0 < t < 1$:

a) Con el método de Newton, partiendo de $t_0 = 0$ y dos iteraciones.

Solución: Primero, observemos que si $f(t) = 3t - 4t^3$, $0 \leq t \leq 1$, $f(0) = 0 < 1/2 < 1 = f(1/2)$, luego la ecuación tiene alguna solución en $(0, 1/2)$. Asimismo, $f'(t) = 3 - 12t^2 < 0$, $0 < t < 1/2$, de dónde f es estrictamente creciente en $[0, 1/2]$ y entonces la ecuación $f(t) = 1/2$ tiene solución única en $(0, 1/2)$ (de hecho, tiene otra solución en $[1/2, 1]$, pues ahí f es estrictamente decreciente y $f(1) = -1 < 1/2$). Puesto que $f(t) = 1/2 \Leftrightarrow g(t) := f(t) - 1/2 = 0$, con ésta función g, calculando la Ψ correspondiente según el procedimiento del Problema 16, obtenemos

$$\Psi(t) = t - \frac{g(t)}{g'(t)} = t - \frac{3t - 4t^3 - 1/2}{3 - 12t^2} = \frac{1 - 32t^3}{6 - 24t^2}$$

y entonces,

$$t_0 = 0 \Rightarrow t_1 = \Psi(t_0) = \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots \Rightarrow t_2 = \Psi(t_1) = 0{,}1736111\ldots$$

Si aplicamos el Método de Bisección y queremos alcanzar 4 cifras decimales correctas, necesitamos un número n de iteraciones tal que $2^{n-1} \cdot 1/2 < 10^{-4}$, lo cual proporciona $n \geq 13$. Como tal cosa, como es lógico, desborda mi paciencia, bisecando $[0, 1/2]$ obtenemos que como $f(1/4) = 11/16 > 1/2$, la solución $c \in (0, 1/4 = 0{,}25)$. Bisecando $(0, 0{,}25)$ y usando que $f(0{,}125) <$