

Soluciones Hoja 3. Pedro Balodis

Problema 2. Decidir la convergencia escribiendo las series como sumas telescópicas y calcular la suma cuando sea posible:

- a) $S = \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}$: Si $x_n = \log \frac{n}{n+1}$, $x_n = \log n - \log(n+1)$. Así, las sumas parciales de S son, para $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{j=2}^n (\log j - \log(j+1)) = \left[\sum_{j=2}^n \log j \right] - \left[\sum_{j=3}^{n+1} \log j \right] = \log 2 - \log(n+1)$$

(hemos usado que $\sum_{j=2}^n \log(j+1) = \sum_{j=3}^{n+1} \log j$). Por tanto, $s_n \rightarrow -\infty$, luego S es divergente

- b) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$: Si $x_n = \frac{1}{n(n+2)}$, descomponiendo x_n en combinación lineal de fracciones simples, $x_n = (1/2) \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right]$. Entonces, sus sumas parciales S_n , $n \geq 1$ son:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{j} - \frac{1}{j+2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right\} \end{aligned}$$

de donde $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3/4$.

- c) $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$: Las sumas parciales de S_n , $n \geq 0$ son

$$S_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

que no tiene límite, luego S es divergente (también podía observarse esto simplemente notando que no se cumple que $x_n \rightarrow 0$.)

Problema 3. Calcular las siguientes sumas, justificando su convergencia:

1. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^n}$: Tenemos

$$\begin{aligned} S &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} r^n; \quad r = \frac{1}{5} \text{ cumple } |r| < 1 \Rightarrow S \text{ converge} \\ &= 4 \frac{r}{1-r} = 4 \frac{(1/5)}{1-(1/5)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. $S = \sum_{n=0}^{\infty} [4 \cdot (0, 1)^n + (-0, 7)^n]$: Tenemos $S = 4S_1 + S_2$, siendo $S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (0, 1)^n$, $S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-0, 7)^n$ dos sucesiones convergentes (y una combinación lineal de sucesiones convergentes es convergente a la combinación lineal de las sumas).
Por tanto:

$$S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}, \quad S_2 = \frac{1}{1 + \frac{7}{10}} = \frac{10}{13} \Rightarrow S = \frac{40}{9} + \frac{10}{13}$$

3. $S = \sum_{n=2}^{\infty} \pi^{n/2} e^{-n}$: $S = \sum_{n=2}^{\infty} r^n$, $r = \pi^{1/2} e^{-1}$. Puesto que $2 < e < 3 < \pi < 4$, $0 < r < \frac{4^{1/2}}{2} = 1$, luego S es convergente con

$$S = \frac{r^2}{1 - r}, \quad r = \pi^{1/2} e^{-1}$$

Problema 4. Probar la divergencia, con el criterio del término general (esto es, si $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, $x_n \rightarrow 0$ lo cual equivale a que si x_n no converge a 0, S es divergente):

1. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n-1}$: Si $x_n = \frac{n+3}{3n-1}$, $x_n \rightarrow 1/3 \neq 0$.
2. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2n^2}$: $x_n = \sqrt[n]{2n^2} = \underbrace{2^{1/n}}_{>1} \underbrace{n^{1/(2n)}}_{>1} > 1$ (hemos usado que $a^b > 1$ si $a > 1$ y $b > 0$), luego x_n no puede converger a 0 (de hecho, converge a 1, aunque éso no es estrictamente necesario), y S diverge.
3. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow e^{-1} > 0$, luego S diverge.
4. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin n!}{n}\right)$: $x_n = 1 + \frac{\sin n!}{n}$ cumple

$$1 - \frac{1}{n} \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \forall n$$

Usando el Lema del Sandwich (o de las Sucesiones Encajadas), deducimos que $x_n \rightarrow 1$, luego S diverge.

Problema 5. Decidir la convergencia, comparando con series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, $p > 0$ (ver la indicación teórica del ejercicio):

1. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2013}$: Puesto que $x_n = \frac{1}{n^2 + 2013}$ cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x_n = 1$, la convergencia de ésta serie equivale a la de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que es convergente por ser el exponente $p = 2 > 1$.
2. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{20n - 13}$: Puesto que $x_n = \frac{1}{20n - 13}$ cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n x_n = 1/20 > 0$, la convergencia de ésta serie equivale a la de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que es divergente por ser el exponente $p = 1$.
3. $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$: Puesto que $x_n = \frac{1}{2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1/n^{1/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} x_n = 1/3 > 0$, la convergencia de ésta serie equivale a la de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$, que es divergente por ser el exponente $p = 1/2 \leq 1$.

$$n^{1/2} x_n = \frac{n^{1/2}}{2n^{1/2} + n^{1/2}(1 - 1/n)^{1/2}} = \frac{1}{2 + (1 - 1/n)^{1/2}} \rightarrow \frac{1}{3}$$

4. $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{2013n^2 + 2014}$: Puesto que $x_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{2013n^2 + 2014}$ cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} x_n = 1/2013 > 0$, la convergencia de ésta serie equivale a la de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, que es convergente por ser el exponente $p = 3/2 > 1$.

$$n^{3/2} x_n = \frac{n^{3/2} n^{1/2} (1 + n^{-1/2})}{n^2 (2013 + 2014n^{-2})} = \frac{1 + n^{-1/2}}{2013 + 2014n^{-2}} \rightarrow \frac{1}{2013}$$

Problema 5. Estudiar la convergencia de:

- a) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n2^n}$: Si $x_n = \frac{n^2 + 1}{n2^n}$, $x_n > 0$ y

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{[(n+1)^2 + 1]n}{2(n+1)(n^2 + 1)} \rightarrow \frac{1}{2} \in [0, 1)$$

Por el Criterio del Cociente (Prop.10 de las Notas de Clase), S es convergente. Si usáramos el Criterio de la Raíz,

$$|x_n|^{1/n} = \frac{1}{2}(n + 1/n)^{1/n} = \frac{1}{2}n^{1/n}(1 + 1/n^2)^{1/n} \rightarrow \frac{1}{2},$$

pues $n^{1/n} \rightarrow 1$ (aunque justificar ésto excede lo que podemos hacer con lo que conocemos en éste momento), y de nuevo concluiríamos que S es convergente.

- b) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n$: Si $x_n = \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n$, $x_n > 0$ y

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{2n+2}{3n+4} \left[\frac{(2n+2)(3n+1)}{(3n+4)2n} \right]^n \\ &= \frac{2n+2}{3n+4} \underbrace{\left[1 + \frac{2}{6n^2+8n} \right]^n}_{\rightarrow 1}; \quad n \cdot \frac{2}{6n^2+8n} \rightarrow 0 \\ &\rightarrow \frac{2}{3} \in [0, 1) \end{aligned}$$

Por el Criterio del Cociente, S es convergente. Si usáramos el Criterio de la Raíz,

$$|x_n|^{1/n} = \frac{2n}{3n+1} \rightarrow \frac{2}{3},$$

y de nuevo obtendríamos la convergencia de S .

- c) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 6}{n^3 + 1}$: Si $x_n = \frac{n^2 - 6}{n^3 + 1}$, $\frac{x_n}{1/n} = nx_n \rightarrow 1$ y razonando como en el Problema 5, S diverge.

- d) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$: Si $x_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $x_n > 0$ y

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{[(n+1)!]^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2 (n!)^2 (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!(n!)^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &\rightarrow \frac{1}{4} \in [0, 1) \end{aligned}$$

Por el Criterio del Cociente, S es convergente.

e) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^3} : \text{ Si } x_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^3}, x_n > 0 \text{ y}$

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{(n+1)^3 - n^3} \left[\frac{[(n+1)^2 - 1]n^2}{(n+1)^2(n^2 - 1)} \right]^{n^3} \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{3n^2 + 3n + 1}}_{:=a_n} \underbrace{\left[1 + \frac{2n+1}{(n+1)^2(n^2 - 1)} \right]^{n^3}}_{:=b_n} \end{aligned}$$

Las sucesiones a_n y b_n son de la forma $(1+x_n)^{y_n}$ con $x_n \rightarrow 0$, $y_n x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$. Entonces es fácil ver que $(1+x_n)^{y_n} \rightarrow e^{l-1}$. Usando ésto, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow e^{-3}e^2 = e^{-1} \in [0, 1)$. Entonces, por el Criterio del Cociente, S es convergente. Si usáramos el Criterio de la Raíz,

$$|x_n|^{1/n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \rightarrow e^{-1},$$

y de nuevo obtenemos la convergencia de S .

f) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2} : \text{ Si } x_n = \frac{(n!)^2}{2n^2}, x_n > 0 \text{ y}$

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{[(n+1)!]^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}} \\ &= (n+1)^2 2^{-2n-1} \end{aligned}$$

Usaremos el siguiente Lema: si $a > 1$ y $p \in \mathbb{R}$ es cierto exponente, $x_n = n^p a^{-n} \rightarrow 0$.² Aplicando ésto, es inmediato que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow 0$, luego por el Criterio del Cociente, la serie converge.

g) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(n+2)}{n^{3/2}} : \text{ Si } x_n = \frac{1 + \cos(n+2)}{n^{3/2}}, |x_n| \leq 2n^{-3/2}$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ (y ésta se argumenta como en el Problema 5.)

h) $S = \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}-3} : \text{ Si } x_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}-3}, n \geq 7, x_n$ está bien definido y $n^{1/2}x_n \rightarrow 1$, luego la divergencia de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=7}^{\infty} n^{-1/2}$ (y ésta se argumenta como en el Problema 5.)

Problema 7. Estudiar la convergencia según los valores del parámetro α :

a) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha(n+1)}$: Puesto que $x_n = \frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ cumple $n^{\alpha+1}x_n \rightarrow 1$, razonando como en el Problema 5, la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$, la cual se da si $\alpha + 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

¹Ésto no es del todo fácil argumentarlo con lo que conocemos hasta ahora de sucesiones, pero será fácil hacerlo cuando veamos Desarrollos de Taylor

²**Dem:** la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $x_n = n^p a^{-n}$ cumple $x_n > 0 \forall n$ y

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^p}{n^p a} \rightarrow \frac{1}{a} \in (0, 1); \quad \frac{(n+1)^p}{n^p} = (1 + n^{-1})^p \rightarrow 1^p = 1$$

Como entonces existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$, para tal n , $0 < x_{n+1} \leq x_n$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente a partir de $n = n_0$, de dónde tiene límite $l \geq 0$. Considerando que $x_{n+1} = \frac{1}{a}(1 + n^{-1})^p x_n$, deducimos tomando límites que $l = \frac{l}{a}$, luego $l = 0$, por ser $\frac{1}{a} \neq 1$.

b) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\alpha}$: $x_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\alpha}$ puede escribirse como

$$x_n = \left[\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right]^{\alpha} = n^{-\alpha/2} [\sqrt{1+1/n} + 1]^{-\alpha/2}$$

de lo cual se deduce que $n^{\alpha/2} x_n \rightarrow 1$, luego la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$, la cual se da sii $\alpha/2 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

c) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{n^2 + 1}$: Puesto que $x_n = \frac{e^{\alpha n}}{n^2 + 1}$ cumple

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{e^{\alpha(n+1)}(n^2 + 1)}{e^{\alpha n}[(n+1)^2 + 1]} \\ &= \frac{e^{\alpha}(n^2 + 1)}{(n+1)^2 + 1} \\ &\rightarrow e^{\alpha} \end{aligned}$$

tenemos, según el Criterio del Cociente que S converge si $e^{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha < 0$ y diverge si $e^{\alpha} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$. Para $\alpha = 0$ éste criterio no proporciona información, pero entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$, y como $x_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ cumple $n^2 x_n \rightarrow 1$, la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, la cual se cumple. En resumen, la serie S converge sii $\alpha \leq 0$.

Problema 8. Estudiar la convergencia, absoluta o condicional, de las siguientes series de signo variable:

a) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + n - 6}{n^4 + 1}$: Si $x_n = (-1)^n \frac{n^2 + n - 6}{n^4 + 1}$, $n^2 |x_n| \rightarrow 1$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

b) $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n^2)$: Si $x_n = \frac{1}{n^2} \sin(n^2)$, $|x_n| \leq \frac{1}{n^2}$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

c) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: Si $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotada. Como no se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ es divergente, aunque sí que se cumple que las sumas parciales de S están acotadas.

Problema 10. Idem para las series:

a) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$: Si $x_n = \frac{n}{n+1}$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotada ($\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{n(n+2)} > 1$ y $x_n > 0$). Como no se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ es divergente, aunque sí que se cumple que las sumas parciales de S están acotadas. indescription

b) $S = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}}$: Si $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 4}}$, $n \geq 3$, la sucesión $\{x_n\}_{n=3}^{\infty}$ es monótona decreciente: observamos primero que $x_n > 0 \forall n \geq 3$ y luego

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left[\frac{(n+1)^2 - 4}{n^2 - 4} \right]^{-1/2} = \left[\underbrace{1 + \frac{2n-1}{n^2-4}}_{>1} \right]^{-1/2} < 1; \quad n \geq 3$$

Como además está claro que $x_n \rightarrow 0$, S es convergente. Su convergencia es condicional (no absoluta), pues como $nx_n \rightarrow 1$, la convergencia absoluta de S sería equivalente a la de $S' = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$, la cual no se cumple.

- c) $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$: Si $x_n = \frac{n^2}{e^n}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow e^{-1} \in (0, 1)$, luego la convergencia (absoluta) de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$. Si usáramos el Criterio de la Raíz,

$$|x_n|^{1/n} = n^{2/n} e^{-1} \rightarrow e^{-1}; \quad n^{2/n} \rightarrow 1,$$

y de nuevo S converge (absolutamente).

Problema 11. Probar que si $a_n > 0 \forall n$ y $a_n \rightarrow L > 1$, entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} [a_1 \dots a_n]^{-1}$ converge.

Dem: Escogiendo $r \in (1, L)$ (por ejemplo, $r = \frac{1+L}{2}$), existe N tal que $n \geq N \Rightarrow a_n \geq r$ (esto es así porque si $\epsilon = L - r > 0$, existe N tal que $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$, luego entonces $a_n = (a_n - L) + L \geq L - \underbrace{|a_n - L|}_{\leq \epsilon = L - r} \geq L - (L - r) = r$).

Entonces, para $n \geq N$,

$$a_1 \dots a_n = \underbrace{[a_1 \dots a_{N-1}]}_{:=A>0} \underbrace{[a_N \dots a_n]}_{n-N+1 \text{ factores } \geq r} \geq Ar^{n-N+1} = Br^n; \quad B = Ar^{-N+1} > 0$$

luego, de nuevo para $n \geq N$,

$$0 < [a_1 \dots a_n]^{-1} \leq Cr^{-n}, \quad C = B^{-1} < \infty \quad (1)$$

Usando la estimación (1), la convergencia de S se deduce de la $S' = \sum_{n=N}^{\infty} r^{-n}$, la cual es cierta por ser $r > 1$. Una forma alternativa de hacerlo es observar lo siguiente: si $x_n = [a_1 \dots a_n]^{-1}$, $x_n > 0 \forall n$ y los cocientes

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a_{n+1}^{-1} \rightarrow L^{-1} \in (0, 1) \quad (\text{pues } L > 1)$$

luego aplicando el Criterio del Cociente, deducimos inmediatamente la convergencia de S .

Problema 12. Decidir si es verdadero o falso (si es falso, dando algún contraejemplo):

- a) Si $a_n \geq 0 \forall n$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $S' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también.

Verdadero: Si S converge, $a_n \rightarrow 0$, de dónde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto acotado y existe una constante C con $0 \leq a_n \leq C \forall n$. Entonces $0 \leq a_n^2 = a_n a_n \leq C a_n$, de modo que

$$0 \leq S' \leq \sum_{h=1}^{\infty} C a_n = CS < \infty$$

(Observación: El argumento no funciona en absoluto al revés, como la sucesión $S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/4}$ muestra: S diverge, pero $S' = \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-3/4})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ converge).

- b) Si $a_n > 0 \forall n$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $S' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ diverge.

Verdadero: Como S converge, $a_n \rightarrow 0$, y como además $a_n > 0$, $a_n^{-1} \rightarrow \infty$, luego S' es divergente.

c) Si $a_n \rightarrow 0$, entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Falso: Considerando la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$, que es divergente.

d) Si $0 < a_n \forall n$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es monótona y no-acotada, entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-n}$ converge.

Verdadero: Primero de todo, observamos que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ debe ser creciente, pues si fuera decreciente y positiva, tendría un límite $l \geq 0$ de donde $l \leq a_n \leq a_1 \forall n$, lo cual contradice que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada. Siendo $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ creciente y no-acotada, $a_n \rightarrow \infty$, de donde existe N tal que $n \geq N \Rightarrow a_n \geq 2$. Entonces, para $n \geq N$, $0 < a_n^{-n} \leq 2^{-n}$, luego la convergencia de S se deduce de la $S' = \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n}$.

e) Si $0 \leq a_n \forall n$, entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2a_n}{3a_n + 1} \right)^n$ converge.

Verdadero: Observamos que

$$0 \leq \frac{2a_n}{3a_n + 1} = \frac{2}{3} \frac{a_n}{a_n + 1/3} \leq \frac{2}{3} \frac{a_n + 1/3}{a_n + 1/3} = \frac{2}{3} \forall n$$

(en la primera desigualdad usamos que $a_n \geq 0$, y en la segunda que $a_n + 1/3 > 0$). Por tanto, podemos estimar

$$0 \leq \left(\frac{2a_n}{3a_n + 1} \right)^n \leq (2/3)^n \forall n$$

luego la convergencia de S se deduce de la de $S' = \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$.

Problema adicional: Decidir para qué valores de $a \geq 0$ la serie $S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^a n}$ es convergente.

Solución: Si $x_n = \frac{1}{n \log^a n}$, x_n es decreciente, pues para $a \geq 0$, $a_n = n$ y $b_n = \log^a n$ son ambas crecientes, luego también $c_n = a_n b_n$, y entonces $x_n = 1/c_n$ es decreciente. Por tanto, el Criterio de Condensación es aplicable y la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n}$. Pero

$$2^n x_{2^n} = \frac{2^n}{2^n (\log(2^n))^a} = \frac{n^{-a}}{\log^a 2}.$$

Por tanto, la convergencia de S equivale a la $S' = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-a}$, y por lo que hemos visto en Teoría, esto ocurre si $a > 1$ (lo cual a su vez lo dedujimos usando el Criterio de Condensación).