

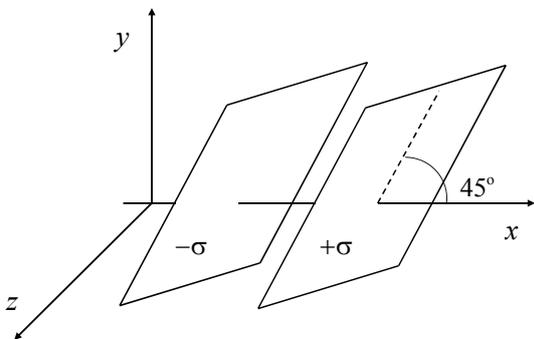
**Tema 6. Electromagnetismo y Relatividad**

Transformaciones de Lorentz. Estructura del espacio-tiempo: intervalo y cono de luz, invariantes, cuadvectores posición, velocidad y momento lineal. Electrodinámica relativista: Cuadrivector densidad de corriente. Cuadrivector potencial. El campo magnético como efecto relativista, transformación de los campos. El tensor campo electromagnético.

Problemas

- Una partícula de carga  $e$  y masa  $m$  se mueve en un campo electrostático de potencial  $V = k(x^2 - y^2)$ , donde la constante  $k > 0$ . La posición inicial es  $(x_0, y_0, z_0)$  y la velocidad inicial  $(0, 0, v_0)$ .
  - Escribe las ecuaciones relativistas de movimiento de la carga.
  - Suponiendo la aproximación no relativista, determina la trayectoria de la partícula.
- Comprobar (realizando en detalle la transformación de los campos) que las cantidades  $c^2 B^2 - E^2$  y  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  son invariantes en una transformación de Lorentz.
  - Si en un punto  $P$  de un sistema de referencia se mide  $\mathbf{B} = 0$  y  $\mathbf{E} \neq 0$ , ¿es posible encontrar otro sistema en el que el campo eléctrico sea nulo en  $P$ ?
- Hallar en el sistema de laboratorio los campos de un condensador plano, con densidad de carga  $\sigma$  en el sistema propio, que se mueve a) con velocidad  $\vec{v}$  paralela a las placas; b) con  $\vec{v}$  perpendicular a las placas. Comprobar los invariantes en la transformación.

- Un condensador plano forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$  como se muestra en la figura y está cargado con  $\pm\sigma$  C/m<sup>2</sup>.



- Hallar el campo eléctrico en el sistema propio  $S$ .  
El sistema  $S'$  se mueve hacia la derecha con velocidad  $v$  respecto de  $S$ .
- Hallar los campos en  $S'$
- ¿Qué ángulo forman las placas con el eje  $x'$ ?

- ¿Es perpendicular el campo eléctrico a las placas en  $S'$ ?

- Para una onda electromagnética progresiva en el vacío, los campos observados en el sistema de laboratorio  $S$ , tienen la expresión

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \mathbf{u}_y, \quad k = \omega / c; \quad \mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \mathbf{u}_z.$$

- Escribir la expresión de los campos en un sistema  $S'$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v} = v \mathbf{u}_x$  respecto de  $S$ , en función de las coordenadas  $(ct', x', y', z')$ .
- ¿Cuál es la frecuencia  $\omega'$  de la onda en  $S'$ ? Interpretar este resultado
- ¿Cuál es la longitud de onda  $\lambda'$ ?
- A partir de los valores de  $\omega'$  y  $\lambda'$  hallar de velocidad de las ondas en  $S'$ . ¿Es un resultado esperado?
- ¿Cuánto vale el cociente de intensidades en  $S'$  y  $S$ ? ¿Qué podemos decir acerca de la amplitud, frecuencia e intensidad de la onda a medida que  $v \rightarrow c$ ?

6. Se tiene un haz cilíndrico uniforme de electrones, de radio  $a$ . El haz ha sido acelerado mediante una d.d.p.  $V$  y lleva una intensidad de corriente total  $I$ . Halla la fuerza electromagnética sobre un electrón cualquiera del haz, en el sistema de laboratorio.

7. Dos líneas de carga paralelas muy próximas, orientadas en la dirección  $OX$ , con densidades positiva y negativa respectivas  $\lambda$  y  $-\lambda$ , se mueven en la dirección de sus ejes con velocidades  $+v$  y  $-v$ . En el sistema de laboratorio los campos que crean están dados aproximadamente por:  $\vec{E} = 0$ ,  $\vec{B} = (\mu_0 I / 2\pi r) \hat{u}_\phi$ , con  $I = 2\lambda v$ .

a) A partir de los invariantes del campo, analizar si existirá algún sistema de referencia en el que  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{E} \neq 0$ .

b-1) Una carga  $q$  se mueve paralelamente a ambas líneas con velocidad  $\mathbf{u}$ . Hallar la fuerza sobre la carga en un sistema ligado a la misma por transformación de los campos.

b-2) Hallar la fuerza sobre  $q$  usando la transformación del cuadrivector densidad de corriente.

8. La inducción magnética en el interior de un solenoide recto de radio  $R$ , de  $N$  vueltas/m y recorrido por una corriente  $I$ , es  $\mu_0 NI$ . La inducción magnética en el exterior es cero.

a) Calcular los valores de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , dentro y fuera del solenoide, medidos por un observador estacionario, cuando el solenoide se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  en la dirección de su eje.

b) Ídem cuando se mueve en dirección perpendicular.

9. El cuadrivector potencial  $A'^\mu = (0, -\mu_0 n' I' y / 2, \mu_0 n' I' x / 2, 0)$  corresponde a un solenoide ideal de  $n'$  espiras por unidad de longitud e intensidad de corriente  $I'$  en su sistema propio.

a) Determinar los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en el sistema propio.

b) Hallar los campos en el sistema de laboratorio respecto al cual el solenoide se mueve con velocidad  $\vec{v} = v \cdot \hat{u}_x$

c) Hallar los potenciales  $V$  y  $\vec{A}$  en el sistema de laboratorio por transformación del cuadrivector potencial desde el sistema propio.

10. Una esfera perfectamente conductora de radio  $R$  se mueve con una velocidad constante  $\vec{v} = v \hat{u}_x$  siendo  $v \ll c$  a través de un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B \hat{u}_y$ . Si se considera que  $\gamma \approx 1$ , determinar en el sistema propio de la esfera a) los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , b) el potencial eléctrico y c) la densidad superficial de carga inducida en la esfera.

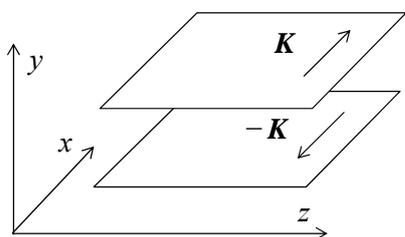
## Material complementario

### Cuestiones

1. En cierto sistema de referencia  $S_0$  hay un campo eléctrico estático uniforme  $E_0$  y un campo magnético también estático y uniforme  $B_0$ , que forman un ángulo  $\theta_0 \neq \pi/2$ , siendo  $B_0 = E_0/c$ 
  - (a) Determinar la intensidad de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en un sistema de referencia en el cual el ángulo entre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  es  $\theta$ .
  - (b) ¿Habrá un sistema de referencia (y si lo hay, hallar su velocidad respecto a  $S_0$ ) en el cual  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  sean perpendiculares?
2. Una carga  $q$  se halla a una distancia  $d$  de un plano conductor indefinido conectado a tierra. Calcular la fuerza que experimenta  $q$  si se mueve con velocidad  $v$  paralelamente al plano conductor.

### Problemas

1. Un protón se mueve con velocidad uniforme  $0,8c$  a lo largo del eje  $x$  en un sistema de referencia inercial. Un segundo protón se mueve con velocidad  $0,6c$  a lo largo del eje  $y$ . Calcular la magnitud y dirección de las fuerzas en un instante dado en que la segunda carga está en la posición  $(0, 10^{-4})m$  y la primera en el origen.
2. Calcular la fuerza, observada en el sistema de laboratorio, entre dos electrones que se mueven a lo largo de trayectorias paralelas separadas  $1\text{ mm}$ , si cada uno de ellos tiene una energía cinética de: a)  $1\text{ eV}$ , y b)  $10^6\text{ eV}$ .
3. Dos láminas conductoras paralelas muy extensas, son eléctricamente neutras y por ellas circulan corrientes superficiales en la dirección del eje  $x$  y sentidos contrarios



(como se indica en la figura), con magnitudes iguales a  $K$  (A/m), de forma que el potencial vector es  $\vec{A} = \mu_0 K y \hat{u}_x$  entre las placas y nulo fuera del espacio entre ellas.

- a) Calcular las cargas y corrientes en un sistema  $S'$  que se mueve con velocidad  $v$  en la dirección del eje  $x$  positivo.
- b) Calcular los campos en función de las cargas y corrientes en cada uno de los sistemas de referencia y comprobar que cumplen las leyes de transformación.

c) Calcular los potenciales en  $S'$  y comprobar que de ellos se deducen los campos encontrados.

4. Para una onda electromagnética armónica en el vacío, el campo eléctrico, observado en el sistema de laboratorio, tiene la expresión  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \hat{u}_y$ .

a) ¿Existirá algún sistema de referencia en el que el campo sea solamente eléctrico o solamente magnético?

Cuando la onda se observa desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad  $\vec{v} = v \hat{u}_x$ ,

b) la fase (el argumento de la exponencial) es invariante. Dar alguna razón que lo justifique.

c) hallar las amplitudes y direcciones de los campos eléctrico y magnético en el nuevo sistema de referencia.