MÉTODOS MATEMÁTICOS II (2020_21)

HOJA 2.0. Espacios vectoriales Introducción

1 Probar que U es s.v. de R^2

a) **U**$= \{(x,x)/x \in \mathrm{R}\}$ **b)U**$= \{(x,0)/x \in \mathrm{R}\}$

2 Sea $(\mathrm{R}^{\mathbf{3}},+,.)$ e.v. sobre R .Comprobar que son s.v. de R^3

a) $\mathbf{U}_1 = \{(x_1,x_2,0)/x_1,x_2 \in \mathrm{R}\}$, **b)** $\mathbf{U}_2 = \{(x_1,0,x_3)/x_1,x_3 \in \mathrm{R}\}$ y **c)**$\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$

3 Comprobar que $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ son s. v. de R^3 y determinar $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$

a) $\mathbf{U}_1 = \{(x,0,0)/x \in \mathrm{R}\}$ y $\mathbf{U}_2 = \{(0,y,0)/y \in \mathrm{R}\}$
b) $\mathbf{U}_1 = \{(\alpha,2\alpha,0)/\alpha \in \mathrm{R}\}$ y $\mathbf{U}_2 = \{(\beta,0,-\beta)/\beta \in \mathrm{R}\}$

4 Obtener $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$ y razonar si son o no s.v. suplementarios.

a)$\mathbf{U_1} = \{(x,x)/x \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^2, $\mathbf{U_2} = \{(x,0)/x \in \mathrm{R}\}$ s.v. de R^2
b)$\mathbf{U}_1 = \{(x,y,0)/x,y \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^3,$\mathbf{U}_2 = \{(0,0,z)/z \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^3
c)$\mathbf{U}_1 = \{(x,y,0)/x,y \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^3,$\mathbf{U}_2 = \{(x,0,z)/x,z \in \mathrm{R}\}$ s.v de R^3

5 Obtener $\mathrm{L}(A_i)$ $\quad i = 1,2,3,4,5$

Determinar las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implicitas en cada caso.
a) $(\mathrm{R}^2,+,.)$ e.v. sobre R, $\quad A_1 = \{(-1,2)\}$, $A_2 = \{(1,0),(0,1)\}$
b) $(\mathrm{R}^3,+,.)$ e.v. sobre R, $A_3 = \{\bar{u}_1 = (1,0,0),\bar{u}_2 = (0,1,0),\bar{u}_3 = (0,0,1)\}$
$A_4 = \{\bar{u}_1 = (1,0,0),\bar{u}_2 = (0,1,0),\}$, $\quad A_5 = \{\bar{u}_1 = (1,0,0)\}$,
c) $(\mathrm{R}^3,+,.)$ e.v. sobre R, $\quad A_6 = \{\bar{u}_1 = (1,1,1),\bar{u}_2 = (-1,2,3),\bar{u}_3 = (1,4,5)\}$

6 Probar si los siguientes sistemas de vectores son L.D.

A) En $\quad \mathrm{R}^3,\{(1,0,1),(1,-1,1),(2,1,2)\},\{(1,1,1),(1,3,2),(2,1,2)\},$
$\{(0,0,0),(1,2,3)\}$, $\{(1,2,3),(1,1,1),(-3,2,1)\},\{(1,2,3),(1,1,1),(3,4,5)\},$
$\{(1,-1,0)(1,2,7),(1,2,1),(1,0,1)\},$
B) En $\quad \mathrm{R}^4 \quad \{(1,2,1,1),(1,0,1,0)\},\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\},$
$\{(0,0,0,0)(3,1,2,7),(1,2,1,1)\},\{(1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,1,0,0),(2,3,1,2)\}$

7 En R^3, probar que

a) $B = \{(1,0,1),(1,-1,1),(2,1,2)\}$ no forman una base son L.D.
2) $\quad B = \quad \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ es una base L.I. que es S.G.
3) En $\quad \mathrm{R}^3 \quad B_1 = \{(1,2,3),(1,1,1),(-3,2,1)\},B_2 = \{(1,2,3),(1,1,1),(3,4,5)\},$
$B_3 = \{(1,-1,0)(1,2,7),(1,2,1),(1,0,1)\}$, $B_4 = \{(0,0,0),(1,2,3)\}$

8 Comprobar que B es una base del e.v. dado

a)$B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es una base de R^3 .
b)$B = \{(1,0,1,0),(0,1,1.0),(1,0,0,1),(0,0,0,1)\}$ es una base de R^4 .

9 Consideremos las bases B de R^3 y R^4 del Prb8 anterior

MÉTODOS MATEMÁTICOS II (2020_21)

HOJA 2.0. Espacios vectoriales Introducción

10 Consideremos los s.v. $U = L(\{(1,-1,0,1),(1,0,0,1),(1,1,1,0)\})$

$$V : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Obtener unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implicitas y una base de U y V.

b) Determinar $U+V$ y $U \cap V$ y obtener unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implicitas y una base de U y V.

c) ¿Es $U+V$ una suma directa? Razonar la respuesta.

d) Determinar las dimensiones de los s.v. U, V, $U+V$ y $U \cap V$.

11 **A**) Consideramos el e.v.R^2, las bases $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ y $B' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

siendo $\begin{cases} \bar{v}_1 = c_{11}\bar{u}_1 + c_{21}\bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 = c_{12}\bar{u}_1 + c_{22}\bar{u}_2 \end{cases}$

Obtener las ecuaciones del cambio de base B' a B.

B)En.R^2, $B = C_{\mathrm{R}^2}, B' = \{\bar{u}_1 = (1,1)_{C_{\mathrm{R}^2}}, \bar{u}_2 = (1,0)_{C_{\mathrm{R}^2}}\}$ y

$B'' = \{\bar{v}_1 = (1,2)_{C_{\mathrm{R}^2}}, \bar{v}_2 = (-1,1)_{C_{\mathrm{R}^2}}\}$

b_1_Obtener las ecuaciones del cambio de base B' a C_{R^2} y de C_{R^2} a B'

b_2_Obtener las ecuaciones del cambio de base B" a C_{R^2}y de C_{R^2} a B"

b_3_Obtener las ecuaciones del cambio de base B" a B' y de B' a B"

12 Consideremos en R^3 la base canónica C_{R^3} y las bases

$B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}, B' = \{(1,3,2),(0,1,-1),(1,0,0)\}$.

i) Ecuaciones del cambio de base de la base B a C_{R^3}

ii) Matriz del cambio de coordenadas de C_{R^3} a B y de C_{R^3} a B'

ii) Coord del vector $\bar{v} \in \mathrm{R}^3$ en B si $(1,0,3)_{C_{\mathrm{R}^3}}$ son sus coord un la base C_{R^3}.

iii) Coord del vector $\bar{w} \in \mathrm{R}^3$ en C_{R^3}.si $(-1,1,2)_B$ son sus coordenadas en B .

iv) Matriz del cambio de base de B a B' y la matriz del cambio B' a B .

v) Coord del vector $\bar{u} \in \mathrm{R}^3$ en B' si $(0,-1,2)_B$ son sus coord un la base B

v) Coord del vector $\bar{q} \in \mathrm{R}^3$ en B si $(1,0,-1)_{B'}$ son sus coord un la base B'

13 Determinar cuales de los siguientes conjuntos de vectores son l.i., cuales general el e.v. R^n al que petenecen y cuales forman una basedel e.v.

En R^2 : (a) $\{\left(\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right),(4,5)\}$, (b) $\{(1,2),\left(11,-7\sqrt{2}\right),(-1,1)\}$,

En R^3 : (c) $\{\left(1,-1,-\sqrt{5}\right),\left(1,1,\sqrt{5}\right),\left(0,1,2\sqrt{5}\right)\})$

(d) $\{(1,0,0),(1,1,1),(0,1,2),(-1,-2,-3)\}$.

En R^4 : (e) $\{(1,1,1,1),(1,-1,-1,1),(1,-1,1,-1),(1,1,-1,-1)\}$