

Soluciones a los ejercicios

Nota importante: es imprescindible intentar realizar los ejercicios antes de mirar aquí sus soluciones.

PROBLEMA 1:

Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 16\}$. Decidir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

1. $\{0, 1, 2, 3\} \subset A$
2. $\{3, 1\} \in A$
3. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\} \subset A$
4. $\emptyset \subset A$
5. $3 \in A$
6. $\{3\} \in A$
7. $A \subset \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
8. $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

SOLUCIÓN.: V, F, V, V, V, F, F, V.

PROBLEMA 2:

Si $A \cap B = A \cap C$, ¿tiene que ser $B = C$? Si $A \cup B = A \cup C$, ¿tiene que ser $B = C$?

SOLUCIÓN. La respuesta es negativa en ambos casos. Se puede ver muy fácilmente con diagramas de Venn.

PROBLEMA 3:

Utilizando diagramas de Venn comprobar que

$$(A \Delta C) \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C),$$

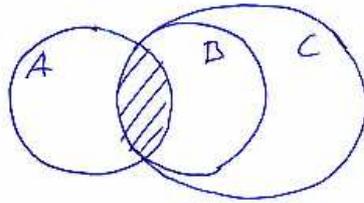
donde Δ denota la diferencia simétrica $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, y siendo $A \setminus B = A - B$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

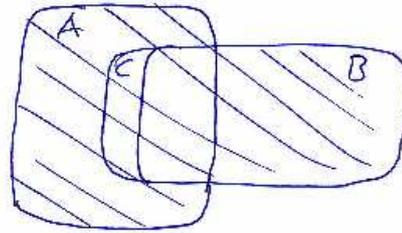
**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

②



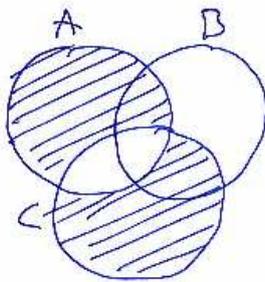
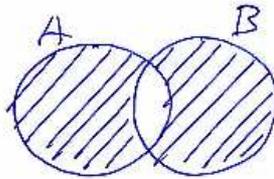
$$A \cap B = A \cap C$$



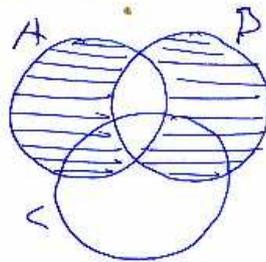
$$A \cup B = A \cup C$$

③

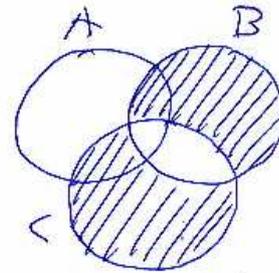
$$A \Delta B$$



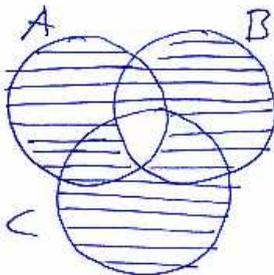
$$A \Delta C$$



$$A \Delta B$$



$$B \Delta C$$



$$(A \Delta B) \cup (B \Delta C)$$

$$A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$$

$$A \Delta C \neq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

PROBLEMA 4:

Elegir la opción verdadera de las siguientes afirmaciones:

1. $\emptyset \subset \{0\}$
2. $0 \in \emptyset$
3. $\emptyset \in 0$
4. $0 \subset \emptyset$

SOLUCIÓN. La primera. El conjunto vacío está contenido dentro del conjunto que contiene al elemento 0.

PROBLEMA 5:

Usando diagramas de Venn encontrar cuál de las siguientes afirmaciones entre los conjuntos A y B es falsa:

1. $A \cap B = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $A \cup (A \cap B) = A$
4. $A \cap (A \cup B) = A$

SOLUCIÓN.

La primera.

Otra forma sencilla de demostrar la falsedad de una afirmación es dar un contraejemplo:

Sean $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Entonces:

$A \cap B = \{4\}$ Pero

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{\{1, 4\}} \cup \overline{\{2, 3, 4, 5\}} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \cup \{1, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Por tanto en general $A \cap B \neq \overline{A} \cup \overline{B}$.

PROBLEMA 6:

Usando diagramas de Venn encontrar cuál de las siguientes afirmaciones entre los conjuntos A y B es falsa:



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

SOLUCIÓN.

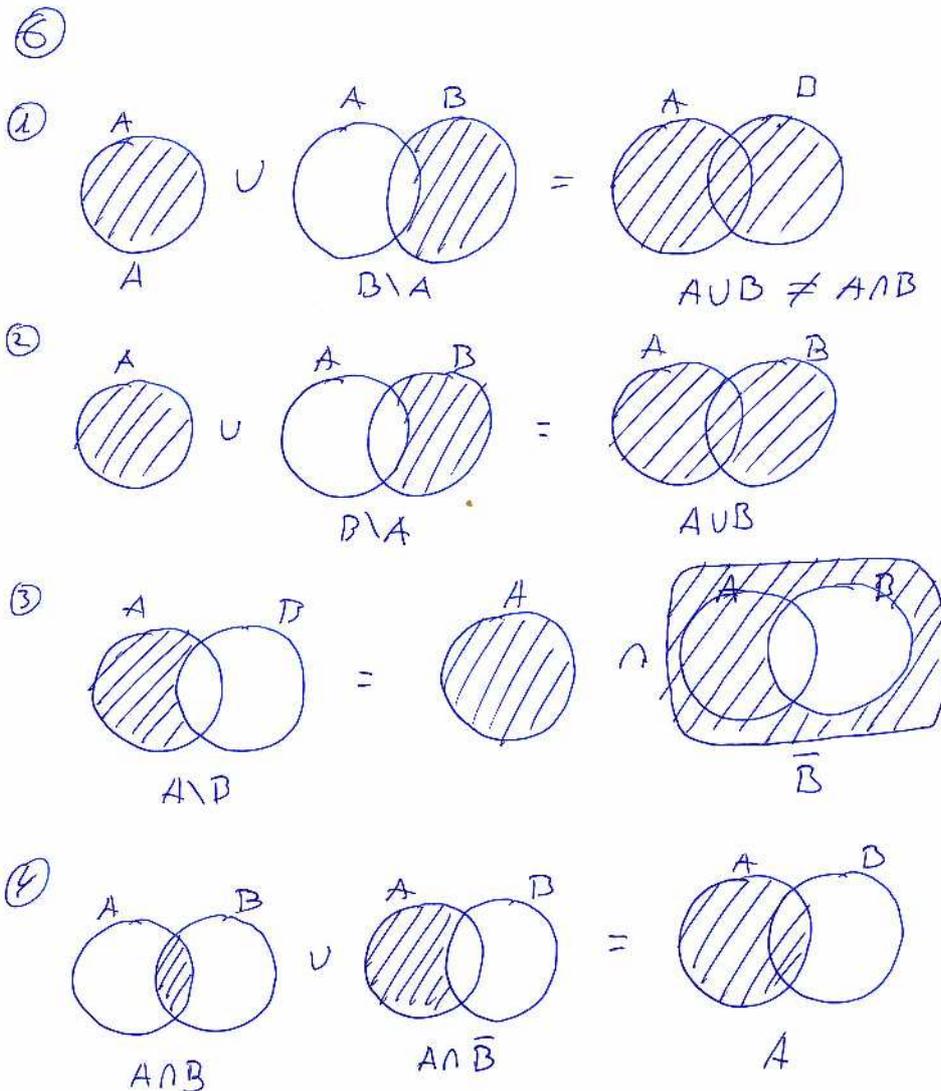
La primera.

Otra forma sencilla de demostrar la falsedad de una afirmación es dar un contraejemplo:

Sean $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Entonces $A \cap B = \{4\}$.

Por otro lado $B \setminus A = \{2, 5, 6\}$, así que $A \cup (B \setminus A) = \{1, 2, 4, 5, 6\} \neq \{4\} = A \cap B$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

PROBLEMA 7:

Simplificar la siguiente expresión:

$$\overline{(\overline{A \cup B}) \cup (\overline{A \cup B})}$$

SOLUCIÓN.

Teniendo en cuenta la ley de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$ podemos reescribir la expresión del siguiente modo: $(A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})$ y aplicando lo mismo a la segunda parte de la expresión tenemos $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ y teniendo en cuenta la propiedad distributiva $((A \cap B) \cup A) \cap (A \cap B \cap \overline{B}) = A \cap A = A$, pues $B \cap \overline{B} = \emptyset$.

PROBLEMA 8:

Demostrar que se verifican las siguientes igualdades:

1. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$
2. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
3. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
4. $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$

SOLUCIÓN.

1. (Obvia)
2. Es obvia, basta usar unos digramas de Venn.
3. Propiedad asociativa de la diferencia simétrica.
4. Si tenemos en cuenta que $A \Delta C = A \cup C \setminus A \cap C$ y asumimos que $C = A \cap B$ entonces la segunda parte de la igualdad será $A \cup (A \cap B) \setminus A \cap (A \cap B)$ y por tanto $A \setminus B$.

PROBLEMA 9:

Simplificar la expresión:

$$\overline{\overline{[(A \cup B) \cap C] \cup \overline{B}}}$$

SOLUCIÓN.

Usando la ley de Morgan obtenemos $[[\overline{(A \cup B) \cap C}] \cap B]$ que es igual a $(A \cup B) \cap B \cap C$, y como

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

2. Determinar el cardinal de los siguientes conjuntos:

$$A = \mathcal{P}(\{a, b, \{a, b\}\}), \quad B = \mathcal{P}(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$$

SOLUCIÓN.

1. La tercera y última expresión.
2. 8, 16 y 2 respectivamente.

PROBLEMA 11:

Si $|A| = 55$, $|B| = 40$, $|C| = 80$, $|A \cap B| = 20$, $|A \cap B \cap C| = 17$, $|B \cap C| = 24$ y $|A \cup C| = 100$, hallar

1. $|A \cap C|$
2. $|C \setminus B|$
3. $|(B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)|$.

SOLUCIÓN.

1. Como $|A \cup C| = |A| + |C| - |A \cap C|$ entonces $100 = 55 + 80 - |A \cap C|$
2. $80 - 24 = 56$.
3. $24 - 17 = 7$.

PROBLEMA 12:

Un biólogo trabaja con 66 especies de plantas, de las cuales 29, 41 y 25 viven en ecosistemas de tipo A, B y C respectivamente. Sabiendo que 16 pueden vivir tanto en ecosistemas A como B, 8 en ecosistemas A y C, y 7 en ecosistemas B y C, obtener el número de especies que pueden estar presentes en los tres ecosistemas. Calcular también el número de especies que pueden vivir en ecosistemas de tipo A y B pero que no pueden vivir en los de tipo C.

SOLUCIÓN. Vamos a echar mano del principio de inclusión exclusión para tres conjuntos:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

En este caso tendremos podemos traducirlos a números según el enunciado de la siguiente manera:

$66 = 29 + 41 + 25 - 16 - 8 - 7 + |A \cap B \cap C|$. Despejado $|A \cap B \cap C|$ que es lo que nos piden

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

- a) $\lceil 3/4 \rceil$
- b) $\lfloor 7/8 \rfloor$
- c) $\lceil -3/4 \rceil$
- d) $\lfloor -7/8 \rfloor$

SOLUCIÓN.

- a) 1 b) 0 c) 0 d) -1

PROBLEMA 14:

1. Usar la propiedad $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ para calcular $\lceil 3,01 \rceil$
2. Demostrar la falsedad o veracidad de la expresión: $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

SOLUCIÓN.

1. $\lceil 3,01 \rceil = \lceil 0,01 + 3 \rceil = \lceil 0,01 \rceil + 3 = 1 + 3 = 4$
2. La expresión $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ es falsa. Basta un contraejemplo para demostrarlo $\lceil 1/2 + 1/2 \rceil = 1$, pero $\lceil 1/2 \rceil + \lceil 1/2 \rceil = 1 + 1 = 2$

PROBLEMA 15:

Determinar si las siguientes funciones son biyecciones:

- a) $f(x) = 2x + 2$
- b) $f(x) = x^2 - 1$
- c) $f(x) = x^3$
- d) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

SOLUCIÓN.

Sí, No, Sí, No.

PROBLEMA 16:

En un grupo de 15 personas hay 7 que tienen nacionalidad francesa, 8 que tienen nacionalidad británica y otros 8 que tienen nacionalidad española. Además hay 2 que son británicos y españoles a la vez, 4 que son españoles y franceses simultáneamente y 3 que tienen la doble nacionalidad británica y francesa. ¿Cuántos tienen triple nacionalidad?



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

culados en Algebra y 10 en Estadística. Además se sabe que hay 3 que están matriculados en

las tres a la vez, en Álgebra y Estadística hay 8, y 5 que lo están en Estadística y Discreta simultáneamente. ¿Cuántos están matriculados en Álgebra y Discreta?

SOLUCIÓN. Por el principio de inclusión exclusión es fácil ver que sólo hay uno.

$$|(E \cap A \cap D)| = 3 = 12 - 9 - 10 - 7 + 8 + 5 + |A \cap D| \text{ y despejando obtenemos } |A \cap D| = 4$$

PROBLEMA 18:

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de divisibilidad

$$a \mathcal{R} b \iff a \mid b.$$

Teniendo en cuenta que el digrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, |)$ que se muestra en la figura.

- (a) Encontrar (si existen) los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo de A .
- (b) Dado el subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12\}$, encontrar (si existen) los conjuntos mayorante y minorante y el supremo e ínfimo de B .

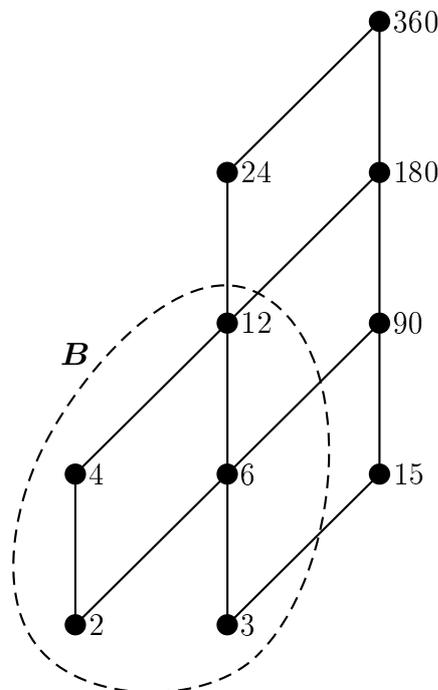


Figura 1: El diagrama de Hasse asociado al problema.

SOLUCIÓN.

a) El único elemento maximal de A es 360. luego, al tratarse de un conjunto finito, $\text{máx}(A) =$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$a \preceq b \iff a \text{ divide a } b.$$



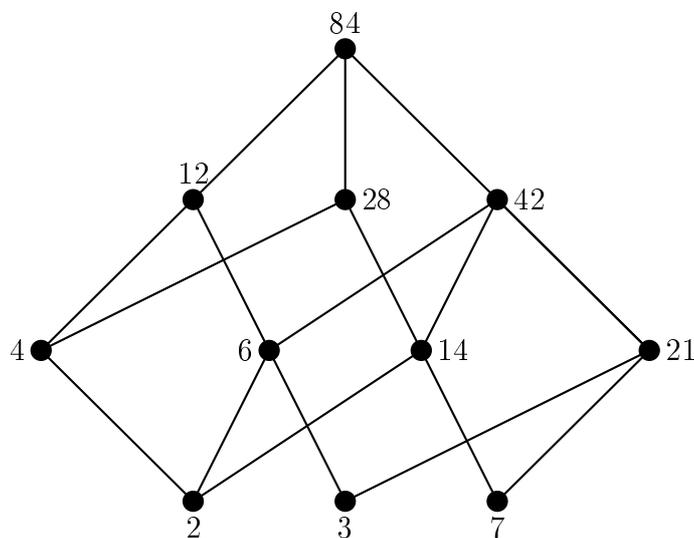
1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial (D, \preceq) .
2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de (D, \preceq) .
3. Dar, si existen, el conjunto de cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo en (D, \preceq) del conjunto $B = \{2, 3, 6, 28\} \subset D$.

SOLUCIÓN.

1) Es trivial enumerar los elementos que forman parte del conjunto D . En concreto

$$D = \{2, 3, 7, 4, 6, 14, 21, 12, 28, 42, 84\}.$$

El diagrama de Hasse asociado al conjunto parcialmente ordenado (D, \preceq) es



- 2) Trivialmente 84 es maximal y máximo; 2, 3, 7 son minimales y no hay mínimo.
- 3) El conjunto de las cotas superiores de B es $\{84\}$ por lo que 84 es el supremo. El conjunto de las cotas inferiores de B es vacío por lo que no hay ínfimo.

PROBLEMA 20:

Considérese la relación de orden parcial \preceq definida en el conjunto D de los divisores positivos de 36 , **excluyendo el 1**, mediante

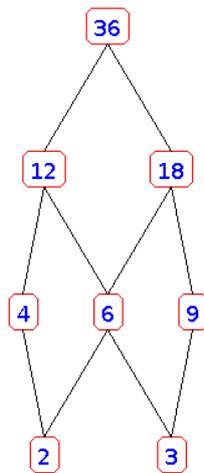
$$a \preceq b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b.$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

SOLUCIÓN.



Maximales: 36. Mimales: 2 y 3. Máximo: 36. No existe mínimo.

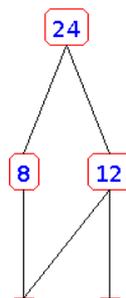
PROBLEMA 21:

Considérese la relación de orden parcial \preceq definida en el conjunto D de los divisores positivos de 24 , **excluyendo el 1**, mediante

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b.$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial (D, \preceq) .
2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de (D, \preceq) .

SOLUCIÓN.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

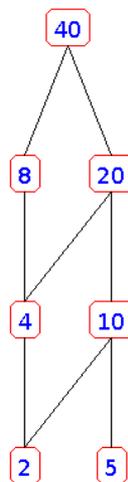
PROBLEMA 22:

Considérese la relación de orden parcial \preceq definida en el conjunto D de los divisores positivos de 40, **excluyendo el 1**, mediante

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \text{ divide a } b.$$

1. Dibujar el diagrama de Hasse del orden parcial (D, \preceq) .
2. Dar, si existen, los elementos maximales y minimales, así como el máximo y mínimo de (D, \preceq) .

SOLUCIÓN.



Maximales: 40. Minimales 2 y 5. Máximo: 40. No existe mínimo.

PROBLEMA 23:

Sea \mathcal{R} la relación en \mathbb{R}^3 definida como

$$(a_1, a_2, a_3) \mathcal{R} (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2.$$

Demostrar que \mathcal{R} es de equivalencia y encontrar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

SOLUCIÓN.

Para demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia hay que demostrar que es reflexiva, simétrica y transitiva. Definamos la función $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, entonces $\vec{a} \mathcal{R} \vec{b} \Leftrightarrow f(\vec{a}) = f(a_1, a_2, a_3) = f(b_1, b_2, b_3) = f(\vec{b})$. Esta observación simplifica el razonamien-

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Dado un cierto $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$f(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = A^2 \geq 0.$$

La clase de equivalencia que contiene al vector \vec{a} estará formada por todos aquellos puntos $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ que satisfagan $f(\vec{b}) = A^2$. Resulta entonces evidente que las clases de equivalencia vienen dadas por superficies esféricas en \mathbb{R}^3 parametrizadas por el valor de su radio $A \geq 0$. Obviamente, la intersección de dos esferas de distinto radio es vacía. Además, es posible representar cada una de las clases de equivalencia usando el único punto en el que el semi-eje positivo $x \geq 0$ corta a la correspondiente esfera. De este modo, los elementos del conjunto cociente son de la forma

$$[(A, 0, 0)]_{\mathcal{R}} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = A^2\}.$$

y se tiene que

$$\mathbb{R}^3/\mathcal{R} = \{[(A, 0, 0)]_{\mathcal{R}} \mid A \in \mathbb{R}_+\}.$$

PROBLEMA 24:

Sea el conjunto $V = \{x \mid 1 \leq x \leq 20\} \subset \mathbb{N}$. Sea el producto cartesiano $V \times V$ y sobre él definimos la siguiente relación

$$(x, y) \mathcal{R} (a, b) \Leftrightarrow x + b = y + a.$$

1. Demostrar que es una relación de equivalencia.
2. Calcular las clases de equivalencia. ¿Cuál es la clase que tiene mayor número de elementos? ¿Cuál es la clase que tiene menor número de elementos?
3. Calcular el conjunto cociente $(V \times V)/\mathcal{R}$ y decir su número de elementos.

SOLUCIÓN.

1) \mathcal{R} es una relación de equivalencia porque es de la forma $(x, y)\mathcal{R}(a, b)$ si y sólo si $f(x, y) = f(a, b)$ con $f(x, y) = x - y$. La demostración detallada de este punto se encuentra en el problema 1 de este documento.

2) Las clases de equivalencia son de la forma $x - y = \text{constante}$. La constante etiqueta las clases de equivalencia y puede tomar valores entre -19 y 19 . Por ejemplo la clase de equivalencia del $(1, 1)$ corresponde a tomar dicha constante igual a cero y contiene a los elementos

$$[(1, 1)]_{\mathcal{R}} = \{(x, x) \mid 1 \leq x \leq 20\}.$$

En general podemos escribir las $19 \cdot 2 + 1 = 39$ clases de equivalencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [(x, 1)]_{\mathcal{R}} &= \{(x + a, 1 + a) \mid 0 \leq a \leq 20 - x\}, & 1 \leq x \leq 20, \\ [(1, x)]_{\mathcal{R}} &= \{(1 + a, x + a) \mid 0 \leq a \leq 20 - x\}, & 2 \leq x \leq 20. \end{aligned}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

clases con menor número de elementos serán $[(1, 20)]_{\mathcal{R}}$ y $[(20, 1)]_{\mathcal{R}}$ con un sólo elemento.



3) El conjunto cociente $(V \times V)/\mathcal{R}$ tendrá 39 elementos y será igual a

$$(V \times V)/\mathcal{R} = \{[(x, 1)]_{\mathcal{R}} \mid 1 \leq x \leq 20\} \cup \{[(1, x)]_{\mathcal{R}} \mid 2 \leq x \leq 20\} .$$

PROBLEMA 25:

Considera la siguiente relación definida en \mathbb{N} :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}_+ : y = 2^k x .$$

- (a) Demuestra que $(\mathbb{N}, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado.
- (b) Sea $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$. Dibuja el diagrama de Hasse de (X, \mathcal{R}) .
- (c) Encuentra, si existen, el máximo, el mínimo, los elementos maximales y minimales y las cotas superiores e inferiores del conjunto $X \subset \mathbb{N}$.

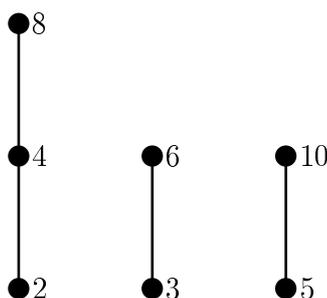
SOLUCIÓN.

a) La relación será una relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. La reflexividad de \mathcal{R} se sigue directamente de la igualdad $x = 2^0 x$, válida para $k = 0 \in \mathbb{Z}_+$.

Para demostrar que la relación satisface la propiedad antisimétrica debemos comprobar que si se cumple que $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ entonces necesariamente se sigue que $x = y$. En este punto es crucial darse cuenta de que la antisimetría de la relación es consecuencia de que únicamente estamos considerando enteros no negativos en los exponentes de 2^k . Si no fuera así, aun en el caso en que $x \neq y$, dado un k tal que $x = 2^k y$, bastaría tomar $-k$ para tener $y = 2^{-k} x$.

Para demostrar que \mathcal{R} satisface la propiedad transitiva debemos demostrar que, si $x = 2^\ell y$ e $y = 2^m z$, entonces necesariamente $x = 2^k z$ para algún $k \in \mathbb{Z}_+$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera tenemos que, en efecto, $x = 2^\ell 2^m z = 2^{\ell+m} z = 2^k z$, con $k = \ell + m \in \mathbb{Z}_+$.

b) El diagrama de Hasse pedido es el siguiente:



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

PROBLEMA 26:

Resolver las siguientes cuestiones:

1. Calcular el número de maneras de colocar en un tablero de ajedrez orientado y con 64 casillas las siguientes piezas: un rey, una reina, un caballo, una torre y un alfil blancos y un rey, una torre, un caballo y un alfil negros.
2. En los alambres que hay entre dos postes de un tendido trifásico de alta tensión en Bodega Bay se distribuyen 99 mirlos indistinguibles. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en los tres alambres si no consideramos la distancia entre pájaros?
3. Si, por el contrario, tenemos en cuenta la distancia entre pájaros y si en cada alambre solo hay 200 posiciones posibles para los pájaros, ¿de cuántas maneras se pueden colocar los 99 mirlos?

NOTA: Los resultados se darán en función de números combinatorios $\binom{a}{b}$ y/o factoriales $a!$

SOLUCIÓN.

1) Las piezas de ajedrez son todas distintas entre sí y las casillas del ajedrez también son distintas entre sí (al estar orientado). Por lo tanto debemos colocar $5 + 4 = 9$ piezas distintas en $8^2 = 64$ casillas distintas. La primera pieza la podemos colocar de 64 maneras, una vez colocada, podemos colocar la segunda de 63 maneras distintas, etc. Una vez colocadas las ocho primeras piezas, hay $64 - 8 = 56$ maneras de colocar la última pieza. Luego, la solución del problema es

$$64 \cdot 63 \cdot 62 \cdots 57 \cdot 56 = \frac{64!}{55!} = 9993927307714560.$$

También se podría hacer de la siguiente manera: hay $\binom{64}{9}$ maneras de elegir las 9 casillas a ocupar y, una vez elegidas, hay $9!$ maneras de colocar las 9 piezas en ellas. Luego, la solución es $\binom{64}{9} 9! = 64!/55!$

2) Tenemos que distribuir 99 objetos iguales (los mirlos) en 3 cajas distintas (los alambres). Como en cada alambre puede haber cualquier número de mirlos (incluido ninguno), el resultado es

$$\binom{99 + 2}{2} = \binom{101}{2} = 5050.$$

3) En este caso, las posiciones de los mirlos son distinguibles. De hecho hay 600 posiciones posibles que pueden ocupar los 99 mirlos. Luego habrá

$$\binom{600}{99}$$

maneras de colocar a los 99 mirlos.

The logo for Cartagena99 features the word 'Cartagena' in a stylized, blue, serif font with a white outline, followed by '99' in a larger, bold, blue font. The text is set against a background of a blue and orange gradient with a white starburst effect behind the '99'.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

(c) ¿De cuántas maneras se pueden distribuir si el cuarto recipiente contiene un número impar de bolas?

SOLUCIÓN.

a) Representamos cada bola mediante un cuadrado y cada recipiente por un par de barras. El enunciado nos dice que las bolas son idénticas; pero los recipiente no lo son. Una manera posible de hacer el reparto es la siguiente:



Los restantes repartos se obtienen reordenando los objetos que aparecen en la representación anterior. En concreto, contamos con siete barras; pero las dos de los extremos no las podemos mover, de manera que sólo hay cinco barras móviles y diez cuadrados. Como no hay ninguna restricción en la manera de colocar las barras y los cuadrados, la solución pedida es

$$\binom{10+5}{5} = \binom{15}{5} = 3003.$$

b) Si ningún recipiente puede quedar vacío, el argumento es el casi el mismo que en el apartado a). La única diferencia es que ahora las cinco barras móviles hay que colocarlas obligatoriamente entre dos cuadrados para que siempre haya al menos un cuadrado en cada recipiente (es decir, entre dos barras consecutivas). Una reparto posible es el siguiente:



Como hay nueve espacios entre los diez cuadrados, la solución pedida es

$$\binom{9}{5} = 126.$$

c) Si el cuarto recipiente tiene un número impar de bolas, sólo puede contener 1, 3, 5, 7 ó 9 bolas. En el primer caso, tendríamos una bola en dicho recipiente y nueve bolas en el resto a colocar sin ninguna restricción en los cinco recipientes restantes. Usando el mismo argumento que en el primer apartado, la solución de este caso sería $\binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4}$. Si colocamos 3 bolas en el cuarto recipiente, tenemos que situar las siete bolas restantes en los cinco recipiente que nos quedan. La solución es $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$. Claramente si colocamos k bolas en el cuarto recipiente, el número de maneras de situar las $10 - k$ bolas restantes en los cinco recipientes es $\binom{10-k+5-1}{5-1} = \binom{14-k}{4}$. La solución pedida es por tanto

$$\binom{13}{4} + \binom{11}{4} + \binom{9}{4} + \binom{7}{4} + \binom{5}{4} = 1211.$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

SOLUCIÓN.

La manera más rápida de solucionar este problema es aprovechar la biyección entre el número de subconjuntos de un conjunto de n elementos y el de las cadenas binarias de longitud n , de manera que si un elemento pertenece a un subconjunto dado, el bit correspondiente es 1 (y 0 en caso contrario).

El apartado a) nos pide el número de cadenas de bits de longitud 10 con menos de 5 unos. El número de cadenas de bits de longitud 10 con k unos es simplemente

$$N_k = \binom{10}{k}, \quad 0 \leq k \leq 10.$$

De esta modo, la solución de a) es

$$N_{k < 5} = \sum_{k=0}^4 N_k = \sum_{k=0}^4 \binom{10}{k} = 1 + 10 + \frac{90}{2} + \frac{720}{3!} + \frac{10!}{6!4!} = 386.$$

El apartado b) consiste en calcular el número $N_{k > 7}$ de cadenas de bits de longitud 10 con más de 7 unos. Luego,

$$N_{k > 7} = \sum_{k=8}^{10} N_k = \sum_{k=8}^{10} \binom{10}{k} = \frac{90}{2} + 10 + 1 = 56.$$

El apartado c) consiste en calcular el número de cadenas de bits de longitud 10 con un número impar de unos. Luego,

$$\begin{aligned} N_{k \text{ impar}} &= \sum_{p=0}^4 N_{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^4 \binom{10}{2p+1} \\ &= 2 \left[\binom{10}{1} + \binom{10}{3} \right] + \binom{10}{5} \\ &= 512. \end{aligned}$$

El resultado es lógico ya que el número total de cadenas de bits de longitud 10 es $2^{10} = 1024$ y aquellas con un número impar de unos serán, por simetría, la mitad (i.e., 512).

PROBLEMA 29:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a background of a blue and orange gradient with a subtle, abstract shape.

PROBLEMA 30:

¿De cuantas maneras se pueden recolocar las letras de la palabra MISSISSIPPI de tal modo las nuevas palabras empiecen por I? ¿Y para que la P estén juntas?

SOLUCIÓN.

$$N = \frac{10!}{3!4!2!}$$

$$N = 10 \frac{9!}{4!4!}$$

PROBLEMA 31:

Dado el conjunto de símbolos $\{a, a, a, a, a, b, b, b, c, d, d\}$ ¿Cuántas palabras de 11 letras se pueden formar reordenando sus elementos?

SOLUCIÓN.

$$N = \frac{11!}{5!3!1!2!}$$

PROBLEMA 32:

De cuantas maneras se puede obtener una mano de 3 espadas y 2 bastos de una baraja española de 40 cartas.

SOLUCIÓN.

$$N = \binom{10}{3} \cdot \binom{10}{2} = 120 \times 45 = 5400$$

PROBLEMA 33:

De un grupo de 12 estudiantes se quiere enviar a 4 delegados a una convención. ¿De cuántas maneras se puede hacer? ¿Y si dos no pueden asistir juntos? ¿Y si 2 que están casados sólo pueden ir juntos?

SOLUCIÓN.

- Como hay 12 si elegimos 4 de ellos tendremos

$$\binom{12}{4} = 495$$

- Los otros dos miembros de la delegación pueden elegirse de

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Si los casados no van $\binom{10}{4} = 210$, si van $\binom{2}{2} = 1$. Así que $N = 210 + 1 = 211$ maneras.

PROBLEMA 34:

Demostrar que $3^{2n} + 7$ es divisible por 8 para todo n . Es decir, nos piden que demos demos el siguiente enunciado:

$$P(n) : 8|(3^{2n} + 7).$$

SOLUCIÓN.

Paso base:

Podemos comprobar que se cumple para $k = 1$ porque $9 + 7 = 16$ y $8|16$ (16 es divisible por 8).

La hipótesis de inducción es precisamente: $P(k) : 8|(3^{2k} + 7)$

Paso de inducción:

Veamos que pasa para $k + 1$:

$$f(k + 1) = 3^{2(k+1)} + 7 = 3^{2k+2} + 7 = 3^2 3^{2k} + 7 = 9 \cdot 3^{2k} + 7$$

Obsérvese que todavía no hemos usado la hipótesis de inducción, sólo hemos jugado con la expresión, que podemos seguir desarrollando:

$$f(k + 1) = 8 \cdot 3^{2k} + 3^{2k} + 7 = 8 \cdot 3^{2k} + (3^{2k} + 7)$$

Esta última expresión tiene dos sumandos. El primero es múltiplo de 8 al estar multiplicado por 8. Así que hasta este punto podemos decir algo acerca de su divisibilidad por 8 sin necesidad de recurrir a la hipótesis de inducción. Todas las operaciones iban encaminadas precisamente hacia este punto y no eran un mero masaje de fórmulas. Se necesita cierta “picardía” para encaminar las expresiones hacia donde queremos llegar.

Es ahora cuando podemos usar el principio de inducción. La expresión para $k + 1$ será divisible por 8 si ambos sumandos que la componen son divisibles por 8. Lo es el primero por matemática elemental y el segundo es justamente la hipótesis de inducción. Luego como $P(k + 1) : 8|(8 \cdot 3^{2k} + (3^{2k} + 7))$ es cierta si la hipótesis de inducción $P(k) : 8|(3^{2k} + 7)$ es cierta, por el principio de inducción podemos concluir que $3^{2n} + 7$ es divisible por 8 para todo n , como queríamos demostrar.

PROBLEMA 35:

Demostrar que $n! > 3^n$ para todo $n > 7$, en donde el factorial se define de la forma habitual $n! = n(n - 1)(n - 2) \dots 1$.

SOLUCIÓN. Paso base:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

si cumple o no la desigualdad.

Para que $(k + 1)k! > 3 \cdot 3^k$ sea cierto lo primero que debe cumplirse es que $k + 1$ sea mayor que 3, cosa que ocurre siempre, porque debido al paso base $k > 6$. Lo que resta es justo que se cumpla la hipótesis de inducción $P(k) : k! > 3^k$.

Así que la desigualdad se cumple para $k + 1$ si la hipótesis de inducción es cierta, luego por el principio de inducción:

$n! > 3^n$ para todo $n > 7$

PROBLEMA 36:

Demostrar por inducción que 3 divide a $n^3 - n$ a partir de cierto n .

SOLUCIÓN.

Paso base:

Si $n = 2$ vemos que $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ y $3|6$.

Hipótesis de inducción para un entero k arbitrario: $P(k) : 3|(k^3 - k)$

Veamos que pasa para $k + 1$:

$$(k + 1)^3 - (k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 2k$$

En donde simplemente hemos operado. Ahora debemos agrupar para conseguir que la hipótesis de inducción aparezca en algún momento.

$$k^3 + 3k^2 + 2k = \underbrace{(k^3 - k)}_a + \underbrace{3(k^2 - k)}_b$$

Paso inductivo:

La expresión completa será divisible por tres si todos los sumandos lo son. Vemos que el segundo sumando de la última expresión (b) es tres veces algo, así que necesariamente es divisible por tres. Entonces la expresión $P(k+1) : 3|(k+1)^3 + (k+1)$ es cierta si la hipótesis de inducción (a) es cierta. Por tanto, según el principio de inducción $3|(n^3 - n) \forall n \geq 2$, como queríamos demostrar.

PROBLEMA 37:

Demostrar por inducción que $1 + 2^n < 3^n \forall n \geq 2$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the word 'Cartagena'. The text is set against a background of a light blue and orange gradient, with a white shadow effect behind the letters.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

SOLUCIÓN.

Paso base:

Veamos si se cumple el paso base.

Para $n = 1$ tenemos que $1 + 2^n = 1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ y $3^n = 3^1 = 3$, pero $3 \not< 3$. Sin embargo para $n = 2$ tenemos que $1 + 2^n = 1 + 2^2 = 1 + 4 = 5$ y $3^n = 3^2 = 9$ y $5 < 9$ así que ya tenemos paso base.

Hipótesis de inducción para un k arbitrario pero fijo: $1 + 2^k < 3^k$

Paso inductivo:

Veamos que pasa para $k + 1$:

$$1 + 2^{k+1} = 1 + 2 \cdot 2^k = 1 + 2^k + 2^k$$

que debe ser menor que $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k = 3^k + 3^k + 3^k$

Así que

$$2^k + 1 + 2^k < 3^k + 3^k + 3^k$$

se cumplirá si la hipótesis de inducción es cierta, pues

$$2^k + 3^k < 3^k + 2 \cdot 3^k$$

es cierta, ya que $2^k < 2 \cdot 3^k$

Por tanto, por el principio de inducción:

$$1 + 2^n < 3^n \quad \forall n \geq 2,$$

como queríamos demostrar.

PROBLEMA 38:

Demostrar por inducción que 3 divide a $n(n + 1)(n + 2)$ a partir de cierto n .

SOLUCIÓN.

Paso base:

Para $n = 1$ tenemos que: $n(n + 1)(n + 2) = 1(1 + 1)(1 + 2) = 6$ y claramente $3|6$.

Hipótesis de inducción para un k arbitrario:

$$P(k) : 3|k(k + 1)(k + 2)$$

Vamos a ver qué pasa para $k + 1$:

$$(k + 1)(k + 1 + 1)(k + 1 + 2) = (k + 1)(k + 2)(k + 3) = \underbrace{(3 + k)}_3 \underbrace{[(k + 1)(k + 2)]}_2$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

El primer sumando es divisible por 3 por definición, ya que es tres veces algo. El segundo es

divisible por 3 según la hipótesis de inducción. Así que $P(k + 1) : 3|(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ será cierta si la hipótesis de inducción es cierta, por tanto según el principio de inducción: $3|n(n + 1)(n + 2) \forall n \geq 1$, como queríamos demostrar.

PROBLEMA 39:

Demostrar por inducción que $3|(4^n - 1) \forall n \geq 1$

SOLUCIÓN.

Paso base:

Para $n = 1$ vemos que: $4^n - 1 = 4^1 - 1 = 3$ y claramente $3|3$.

Hipótesis de inducción:

Para un entero k arbitrario pero fijo tendríamos:

$$P(k) : 3|(4^k - 1)$$

Paso inductivo:

Veamos qué pasa para $k + 1$:

$$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4^k + 4^k + 4^k + 4^k - 1$$

Ahora agrupamos para ver si podemos obtener la hipótesis de inducción en algún sitio y algo que con un poco de suerte sea divisible por 3:

$$4^k + 4^k + 4^k + 4^k - 1 = 3 \cdot 4^k + 4^k - 1 = \underbrace{3(4^k)}_{\alpha} + \underbrace{(4^k - 1)}_{\beta}$$

Esta expresión será divisible por tres si sus sumandos lo son. Como α es divisible por tres al ser tres veces algo y β es justo la hipótesis de inducción entonces $P(k + 1) : 3|4^{k+1} - 1$ será cierta si la hipótesis de inducción es cierta y, por tanto, según el principio de inducción podemos afirmar que $3|(4^n - 1) \forall n \geq 1$, como queríamos demostrar.

PROBLEMA 40:

Demostrar por inducción que 3 es divisor de $n^3 + 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

El caso base es trivial: para $n = 1$, tenemos que $n^3 + 2n = 3$ es obviamente divisible por 3.

Supongamos ahora que, para un cierto natural k , arbitrario *pero fijo*, se cumple la hipótesis de inducción: $3 | k^3 + 2k$; es decir, existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $k^3 + 2k = 3p$. Veamos ahora qué podemos decir del siguiente natural $k + 1$:

$$\begin{aligned} (k + 1)^3 + 2(k + 1) &= k^3 + 3k^2 + 5k + 3 \\ &= k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1) \\ &= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1). \end{aligned} \tag{1}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

El caso base es sencillo: si $n = 2$, $5^2 = 25 \geq 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.



Supongamos ahora que para un cierto k , arbitrario pero fijo, se cumple la hipótesis de inducción: $5^k \geq 3^k + 4^k$ y queremos averiguar qué ocurre con el siguiente entero $k + 1$:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} &= 5 \cdot 5^k \\ &\geq 5(3^k + 4^k) && \text{(si usamos la hipótesis de inducción)} \\ &> 3^{k+1} + 4^{k+1} && \text{(ya que } 5 > 3 \text{ y } 5 > 4 \text{).} \end{aligned}$$

Luego también se cumple para $k + 1$ si la hipótesis de inducción se cumple y por tanto el principio de inducción nos garantiza que se cumple para todo entero $k \geq 2$.

PROBLEMA 42:

Probar por inducción que si $h > -1$ entonces $1 + nh \leq (1 + h)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN.

El paso base corresponde a $n = 1$: tenemos que $1 + h \leq 1 + h$ que se cumple para todo h , en particular, para $h > -1$.

La hipótesis de inducción corresponde a suponer que $1 + kh \leq (1 + h)^k$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo. Queremos ahora saber qué ocurre con el siguiente entero $k + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} 1 + (k + 1)h &= 1 + kh + h \\ &\leq (1 + h)^k + h && \text{(por la hipótesis de inducción)} \\ &= (1 + h)^{k+1} - (1 + h)^{k+1} + (1 + h)^k + h && \text{(sumando y restando } (1 + h)^{k+1} \text{)} \\ &= (1 + h)^{k+1} + h [1 - (1 + h)^k]. \end{aligned}$$

Pero de la hipótesis de inducción se sigue que $1 - (1 + h)^k \leq -kh$ y, por tanto, si $h \geq 0$, deducimos que

$$1 + (k + 1)h \leq (1 + h)^{k+1} - kh^2 < (1 + h)^{k+1},$$

ya que $-kh^2 < 0$. Si $h < 0$ este argumento no es válido, pero se puede usar el siguiente razonamiento: si $h \in (-1, 0)$, entonces $1 - (1 + h)^k > 0$ y como $h < 0$, $h [1 - (1 + h)^k] < 0$ y, por tanto, $1 + (k + 1)h \leq (1 + h)^{k+1}$ también para este caso. Luego se verifica el paso de inducción y el principio de inducción nos garantiza que esta desigualdad es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA 43:

Resolver las siguientes ecuaciones de recurrencia

- $a_n = 2a_{n-1} + n$ para $n \geq 1$, con $a_0 = 1$.
- $a_{n+1} - a_n = 3^n$ para $n \geq 0$, con $a_0 = 1$.

SOLUCIÓN.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

donde k es una constante a determinar.

Cartagena99

La solución particular de la no homogénea es del tipo $Bn + C$ y las constantes B y C se determinan al imponer que sea efectivamente solución de la ecuación de recurrencia:

$$Bn + C = 2B(n - 1) + 2C + n \Rightarrow n(B + 1) + (C - 2B) = 0.$$

Como debe ser cierto para todo n , cada coeficiente $B+1$ y $C-2B$ se debe anular: $B = -1$ y $C = 2B = -2$. Luego la solución particular es $a_n^p = -(n + 2)$ y la solución general de la ecuación es:

$$a_n = -(n + 2) + A2^n.$$

La constante A se determina usando la condición inicial $a_0 = 1 = -2 + A \Rightarrow A = 3$. Luego la solución buscada es:

$$a_n = -(n + 2) + 3 \cdot 2^n.$$

- Es una ecuación de recurrencia lineal de orden uno, con coeficientes constantes y no homogénea. La solución general de la ecuación homogénea asociada es $a_n^h = K$, con K constante. Por otro lado, para encontrar una solución particular ensayamos con

$$a_n^p = C 3^n.$$

Es decir

$$C 3^{n+1} - C 3^n = 3^n \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, la solución general de nuestra ecuación es

$$a_n = a_n^h + a_n^p = K + \frac{3^n}{2}.$$

Ahora bien, imponiendo $a_0 = 1$, la solución de la ecuación del enunciado es

$$a_n = \frac{1 + 3^n}{2}.$$

PROBLEMA 44:

Resolver la siguiente relación de recurrencia no homogénea:

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 4^n \quad \text{con } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 10$$

SOLUCIÓN.

La ecuación característica de la homogénea es

$$x^2 = 4x - 4$$

que tiene a 2 como raíz doble (multiplicidad 2).

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

de la forma

Cartagena99

$$a_n^{(p)} = p_0 4^n.$$

Sustituyendo esta solución particular en la recurrencia original tenemos:

$$p_0 \cdot 4^n = p_0 \cdot 4 \cdot 4^{n-1} - p_0 \cdot 4 \cdot 4^{n-2} + 4^n.$$

Operamos para obtener un buen factor común, que en este caso es 4^n , quedando:

$$p_0 \cdot 4^n = p_0 \cdot 4^n - \frac{p_0}{4} \cdot 4^n + 4^n$$

que simplificando queda

$$p_0 \cdot 4^n = p_0 \cdot 4^n - \frac{p_0}{4} \cdot 4^n + 4^n$$

que despejando nos queda $p_0 = 4$. Así que una solución particular puede ser:

$$a_n^{(p)} = 4^{n+1}.$$

La solución general será de la forma:

$$a_n = (k_1 + nk_2)2^n + 4^{n+1}.$$

Imponemos ahora las condiciones iniciales.

- Caso $n = 0$:

Tenemos que $a_0 = 1$, que en la general nos da $1 = (k_1 + 0 \cdot 2^0 + 4)$. Es decir que $k_1 = -3$

- Caso $n = 1$:

Tenemos que $a_1 = 10$, que nos da $10 = (-3 + k_2)2 + 4^2$. Es decir que $k_2 = 0$.

Así que finalmente tendremos como solución general es:

$$a_n = -3 \cdot 2^n + 4^{n+1}.$$

PROBLEMA 45:

Resolver las siguientes recurrencias:

$$a) a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}, \quad a_0 = 1$$

$$b) a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 6$$

Solución: a) $a_n = 1/2(3^n + 1)$, b) $a_n = 5 \cdot 2^n - 4$

PROBLEMA 46:

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 3^n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 3$$

SOLUCIÓN.

La homogénea es:

$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$$

cuya ecuación característica es: $r^2 - 6r + 9 = 0$, que tiene una raíz doble $r = 3$.
Por tanto, la solución de la homogénea es de la forma:

$$a_n^{(h)} = (k_1 + nk_2)3^n$$

Nos falta una solución particular:

La función que nos convierte la recurrencia en no homogénea es del tipo $s^n[p_0]$ (potencia por polinomio de grado cero), siendo $s = 3$ que es raíz de la ecuación homogénea. Como además 3 es raíz de multiplicidad 2 una solución particular será de la forma:

$$a_n^{(p)} = p_0 n^2 3^n$$

Si ensayamos esta solución particular en la ecuación original obtenemos que

$$p_0 3^2 3^n - 6p_0(n-1)^2 3^{n-1} + 9p_0(n-2)^2 3^{n-2} - 3^n = 0.$$

Podemos ahora multiplicar por 3^2 todos los términos

$$p_0 3^2 n^2 3^n - 6 \cdot 3^2 p_0(n-1)^2 3^{n-1} + 9 \cdot 3^2 p_0(n-2)^2 3^{n-2} - 3^2 3^n = 0$$

y aumentar exponentes en las potencias, en donde sea necesario, gracias a esos 3^2

$$p_0 3^2 n^2 3^n - 6 \cdot 3 p_0(n-1)^2 3^n + 9 \cdot p_0(n-2)^2 3^n - 3^2 3^n = 0$$

Operamos un poco

$$p_0 3^2 n^2 3^n - 2 \cdot 3 \cdot 3 p_0(n-1)^2 3^n + 3^2 \cdot p_0(n-2)^2 3^n - 3^2 3^n = 0$$

$$p_0 3^2 n^2 3^n - 2 \cdot 3^2 p_0(n-1)^2 3^n + 3^2 \cdot p_0(n-2)^2 3^n - 3^2 3^n = 0$$

Ahora podemos dividir todos los sumandos por $3^2 3^n$. De esta forma eliminamos las potencias y podemos despejar p_0 . El método suele ser habitual en este punto y los pasos dados con anterioridad estaban encaminados a conseguir esto mismo. Por tanto, ahora nos queda:

$$p_0 n^2 - 2p_0(n-1)^2 + p_0(n-2)^2 - 1 = 0$$

Ya sólo falta operar un poco

$$p_0 n^2 - 2p_0 n^2 + 4p_0 n - 2p_0 + p_0 n^2 - 4p_0 n + 4p_0 - 1 = 0$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$$a_n^{(p)} = \frac{1}{2}n^23^n$$

Así que la solución de la recurrencia general es:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (k_1 + nk_2)3^n + \frac{1}{2}n^23^n.$$

Ya sólo nos queda ensayar esta solución con las condiciones iniciales para así averiguar los valores de k_1 y k_2 .

La primera condición ($a_0 = 0$) nos dice que

$$0 = (k_1 + 0 \cdot k_2)3^0 + \frac{1}{2}0^23^0$$

y por tanto que $k_1 = 0$.

La segunda ($a_1 = 3$) nos dice que $3 = 3(0 + k_2) + \frac{1}{2}3$ y por tanto que $k_2 = 1/2$.

Normalmente estas constantes no salen una tras otra tan directamente, sino que son solución de un sistema de dos ecuaciones (una de cada condición inicial) con dos incógnitas.

En este caso la solución general es $a_n = \frac{n}{2}3^n + \frac{1}{2}n^23^n = \frac{1}{2}3^n(n + n^2)$.

O lo que es lo mismo:

$$a_n = \frac{1}{2}3^n(n^2 + n)$$

PROBLEMA 48:

Un distribuidor de ordenadores portátiles efectúa un pedido comprendido entre 1000 y 1500 equipos a una fábrica. Le envían dichos equipos en contenedores completos con capacidad de 68 ordenadores cada uno. El distribuidor los reparte entre sus clientes en furgonetas con capacidad de 20 ordenadores, quedando 32 sin repartir en el almacén. ¿Cuántos equipos pidió el distribuidor a la fábrica?

SOLUCIÓN.

Sea N el número de equipos que nos piden calcular. Sabemos que

$$N = 68k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

para algún entero (positivo) k . Además sabemos que

$$N \pmod{20} \equiv 32 \Rightarrow N = 32 - 20p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Nótese que se ha elegido el signo menos en ' $-20p$ ' por conveniencia. De ambas ecuaciones se

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Luego $\text{mcd}(68, 20) = 4$. Como $\text{mcd}(68, 20) = 4 \mid 32 = 8 \cdot 4$, la ecuación anterior admite infinitas soluciones. Usando el algoritmo de Euclides encontramos la siguiente relación (identidad de Bezout):

$$4 = -2 \cdot 68 + 7 \cdot 20.$$

Si multiplicando por 8 la ecuación anterior, resulta evidente que los números $k_0 = -16$ y $p_0 = 56$ nos proporcionan una solución particular de la ecuación diofántica $68k + 20p = 32$. La solución general es

$$\begin{aligned} k_q &= -16 + 5q, \\ p_q &= 56 - 17q, \end{aligned}$$

donde $q \in \mathbb{Z}$. La expresión de N en función de q es inmediata:

$$N = -1088 + 340q.$$

Como $N > 1000$, entonces deducimos que

$$q > \frac{2088}{340} \Rightarrow q_{\min} = 7.$$

El número mínimo de equipos es por tanto

$$N_{\min} = 1292.$$

PROBLEMA 49:

Un profesor reparte equitativamente los libros de su biblioteca entre sus 17 alumnos y sobra un libro. Uno de sus alumnos se queja del número de libros recibido y decide excluirse del reparto. Al volver a repartir sus libros equitativamente entre los alumnos restantes, sigue sobrando un libro. ¿Cuál es el mínimo número de libros que reparte el profesor?

SOLUCIÓN.

El enunciado nos dice que debemos resolver el siguiente sistema de congruencias lineales:

$$\begin{aligned} N &\equiv 1 \pmod{17}, \\ N &\equiv 1 \pmod{16}, \end{aligned}$$

donde N es el número de libros a repartir. Como 17 y 16 son primos relativos, el teorema chino del resto nos garantiza la existencia de una única solución módulo $m = 17 \cdot 16 = 272$. Dicha solución es trivialmente

$$N \equiv 1 \pmod{272},$$

y por tanto

$$N = 1 + 272k, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

El número mínimo de libros corresponderá a tomar $k = 1$:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$28x + 36y = 44.$$

Cartagena99

SOLUCIÓN.

La ecuación es equivalente a

$$7x + 9y = 11.$$

Dicha ecuación admite soluciones enteras ya que $\text{mcd}(7, 9) = 1 \mid 11$. En concreto, mediante la identidad de Bezout, es trivial encontrar una solución particular. Puesto que

$$1 = 4 \cdot 7 - 3 \cdot 9 \Rightarrow 11 = 44 \cdot 7 - 33 \cdot 9,$$

se tiene que $x_0 = 44$ e $y_0 = -33$ son una solución del sistema. El resto de soluciones son de la forma

$$x_k = 44 + 9k, \quad y_k = -33 - 7k, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

PROBLEMA 51:

Usa el algoritmo de Euclides para calcular:

$\text{mcd}(1476, 2808)$,
 $\text{mcd}(23345, 23545)$,
 $\text{mcd}(35234, 2178)$,
 $\text{mcd}(36735, 8347)$,
 $\text{mcd}(52, 13, 65, 26)$

SOLUCIÓN.

$\text{mcd}(1476, 2808) = 36$,
 $\text{mcd}(23345, 23545) = 5$,
 $\text{mcd}(35234, 2178) = 2$,
 $\text{mcd}(36735, 8347) = 1$,
 $\text{mcd}(52, 13, 65, 26) = 13$

PROBLEMA 52:

- Convierte los siguiente enteros en base binaria a base decimal

a) 1010101010 b) 10101111010 c) 1001111010 d) 101111010

- Convierte los siguientes enteros en notación hexadecimal a notación binaria:

a) ACDC b) BECA c) BACA d) FABE

SOLUCIÓN.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

The logo for Cartagena99 features the word 'Cartagena' in a stylized, blue, serif font with a slight shadow, followed by '99' in a larger, bold, blue font. The text is set against a background of a light blue and orange gradient with a subtle arrow shape pointing to the right.

PROBLEMA 53:

Utilizar aritmética modular para calcular los restos de dividir 3^8 por 13 y 2^{14} por 19.

SOLUCIÓN.

Primer caso:

sabemos, por ejemplo, que $3^3 = 27 \equiv 1 \pmod{13}$ y además que $3^8 = (3^3)^2 \cdot 3^2$. Por tanto

$$3^8 \equiv 1 \cdot 3^2 \pmod{13} \equiv 9 \pmod{13}.$$

Así que el resto es 9.

Segundo caso:

En este caso podemos usar, por ejemplo, la siguiente propiedad: $2^4 = 16 \equiv -3 \pmod{19}$. Aunque podríamos usar cualquier otra que nos permita cierta simplificación.

Como $14 = 4 \times +2$ podemos reescribir $2^{14} = (2^4)^3 \times 2^2 \equiv (-3)^3 \times 2^2 \pmod{19}$, que es igual a $-27 \times 4 = -108 \equiv -13 \pmod{19} \equiv 6 \pmod{19}$.

Así que el resto pedido es 6.

PROBLEMA 54:

Usa el algoritmo de Euclides para calcular:

$$\text{mcd}(111, 201), \text{mcd}(12345, 54321), \text{mcd}(1529, 14039), \text{mcd}(9888, 6060)$$

Soluciones: 3, 3, 139, 12

PROBLEMA 55:

Calcular $\text{mcd}(36, 24, 54, 27)$

Pista: Calcular el mcd de los dos primeros, luego el mcd de lo obtenido y el tercero y así sucesivamente.

Solución: 3

PROBLEMA 56:

Simplifica las expresiones:

a) $4x \equiv 5 \pmod{9}$, b) $13x \equiv 14 \pmod{19}$

Soluciones: a) $x \equiv 8 \pmod{9}$, b) $x \equiv 4 \pmod{19}$

The logo for Cartagena99 features the word 'Cartagena' in a stylized, blue, serif font with a drop shadow, followed by '99' in a larger, bold, blue font. The entire logo is set against a light blue and orange background with a subtle gradient.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Revolver la ecuación diofántica lineal: $37x - 107y = 25$

Solución: $x = -8 + 107k$ y $y = -3 + 37k$.

PROBLEMA 59:

Convierte los siguiente enteros en base binaria a base decimal

a) 11111 b) 101010101 c) 1000000001 d) 110100100010000

Soluciones: 31, 341 ,513, 26896

PROBLEMA 60:

Convierte los siguientes enteros en notación hexadecimal a notación binaria:

a) 80E b) 135AB c) ABBA d) ABCDEF

Soluciones: 100000001110, 10011010110101011, 101010111011, 101010111100110111101111

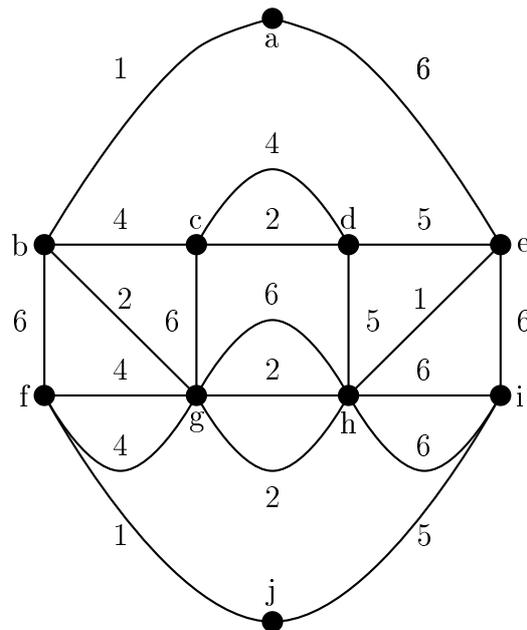
The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue background with a white arrow pointing to the right, and a yellow shadow effect at the bottom.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

PROBLEMA 61:

Considérese el grafo G siguiente:



- (a) ¿Es G un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es conexo?
- (b) Hallar el número de regiones, vértices y aristas del grafo dual G^* .
- (c) ¿Es G Euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible.
- (d) Hallar un árbol A generador mínimo de G y el peso total de dicho árbol.

SOLUCIÓN.

a) No es un grafo simple, porque hay tres aristas entre los vértices h y g . Es plano, ya que su representación gráfica no tiene aristas que se crucen. No es bipartito porque tiene ciclos de longitud tres (por ejemplo, (f, g, b, f)). No es completo porque no todos sus vértices están conectados entre sí (por ejemplo, los vértices a y f no son adyacentes). No es regular porque no todos los vértices tiene el mismo grado (por ejemplo, el grado de a es 2 y el de d , 4). Es conexo, porque dado cualquier par de vértices, existe un camino elemental que los une.

b) Al ser G plano, podemos definir su dual G^* . El número de vértices, aristas y regiones del grafo original puede ser contado directamente de la figura

$$|V| = 10, \quad |E| = 21, \quad R = 13.$$

Estas cantidades satisfacen la ecuación de Euler: $|V| - |E| + R = 10 - 21 + 13 = 2$. Las correspondientes cantidades para el grafo dual son

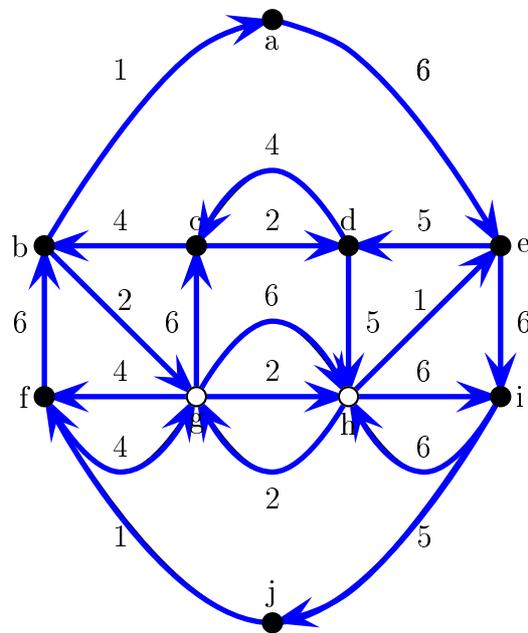
$$|V^*| = R = 13, \quad |E^*| = |E| = 21, \quad R^* = |V| = 10$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

para denotar la que está encima y $h \xrightarrow{P^*} i$ la que está debajo.





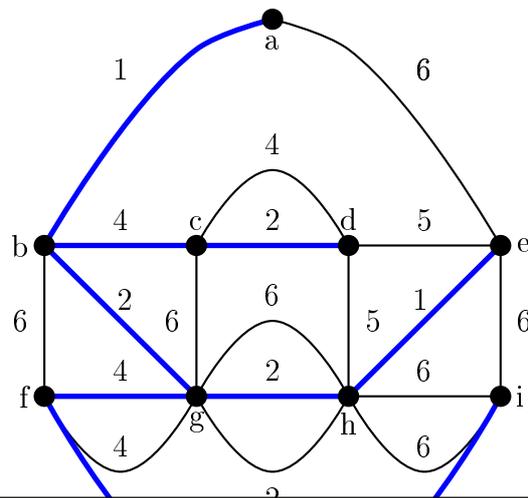
d) Un árbol de peso mínimo lo obtenemos por ejemplo usando el algoritmo de Kruskal. El resultado $A = (V, F)$ lo podemos escribir dando el conjunto F de las aristas del árbol

$$F = \{\{a, b\}, \{e, h\}, \{f, j\}, \{b, g\}, \{c, d\}_2, \{g, h\}_2, \{b, c\}, \{f, g\}_4, \{i, j\}\},$$

donde, por ejemplo, $\{g, h\}_2$ significa que tomamos una de las aristas de peso $\omega = 2$ (si hubiese varias) entre los vértices g y h . Hay $|F| = 9$ aristas, como es de esperar ($|F| = |V| - 1$). El peso total de este árbol es

$$\omega = \sum_{i \in F} \omega_i = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 22.$$

Nótese que en este caso no hay un único árbol recubridor de peso mínimo. ■

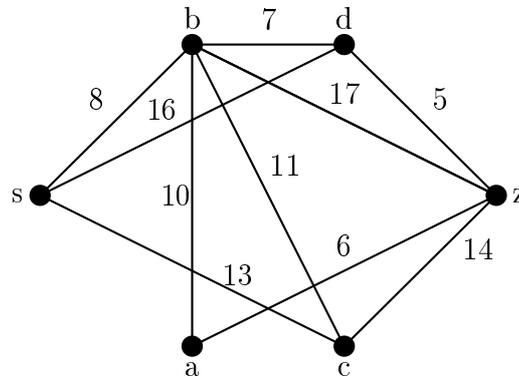


CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

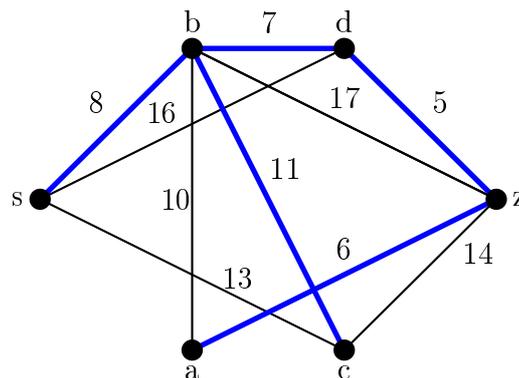
Considérese el grato ponderado de la figura y contéstese a las siguientes preguntas:

1. Calcular el árbol recubridor de peso mínimo sobre dicho grafo y dar su peso.
2. Decir si el grafo es euleriano o semi-euleriano y por qué. En caso de que alguna de las respuestas sea afirmativa, encontrar el correspondiente recorrido euleriano o semi-euleriano.
3. Decir si es regular, bipartito y completo y por qué.



SOLUCIÓN.

1) El árbol generador de peso mínimo está formado por las aristas $\{s,b\}$, $\{b,d\}$, $\{d,z\}$, $\{z,a\}$, y $\{b,c\}$ y pesa 37 unidades.



- 2) Puesto que hay más de dos vértices con grado impar el grafo no es ni euleriano ni semi-euleriano.
- 3) El grafo no es regular ya que hay vértices con grados distintos. No es completo porque hay vértices que no son adyacentes. Tampoco es bipartito ya que contiene ciclos de longitud tres, por ejemplo, (s,d,b,s) . ■

PROBLEMA 63:

Sea el grafo $G = (V, E)$ definido por la siguiente matriz de adyacencia:

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

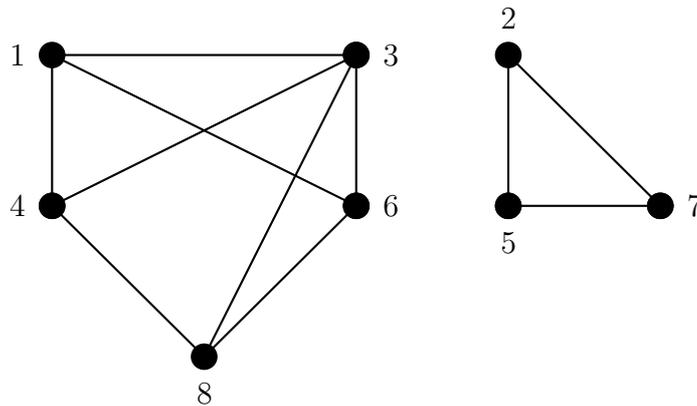


(0 0 1 1 0 1 0 0)

1. ¿Es bipartito? ¿Es planar?
2. Encontrar, si es posible, un árbol generador.
3. ¿Es G semi-euleriano? ¿Cuál es el número mínimo de aristas que necesitamos añadir a G para que sea euleriano?

SOLUCIÓN.

1) Si nombramos los vértices $1, 2, 3, \dots, 8$ según el orden en la matriz de adyacencia, una representación gráfica de G es



G no es bipartito porque contiene ciclos de longitud impar: por ejemplo, $(2, 7, 5, 2)$. Es planar porque se puede representar en el plano sin que se crucen las aristas: la arista $\{3, 4\}$ se puede llevar por fuera del vértice 1, mientras que la arista $\{3, 8\}$ se puede llevar entre las dos componentes conexas de G .

2) No existe un árbol generador de G porque G no es conexo: tiene dos componentes conexas $G = G_1 \cup G_2$ con $V_1 = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ y $V_2 = \{2, 5, 7\}$.

3) G no es semi-euleriano porque no es conexo (para que un grafo sea euleriano no basta con que todos sus vértices tengan grado par). Los vértices de grado impar son $\{1, 4, 6, 8\}$ y todos ellos pertenecen a la componente conexa G_1 .

Para conseguir un grafo euleriano a partir de G necesitamos en primer lugar unir las dos componentes conexas de G . Para ello debemos añadir una arista que conecte uno de los vértices de $V_2 = \{2, 5, 7\}$ (por ejemplo, el 2) con un vértice de $V_1 = \{1, 3, 4, 6, 8\}$ con grado impar (por ejemplo, el 1). El nuevo grafo obtenido de esta forma es conexo y tiene cuatro vértices de grado impar: $\{2, 4, 6, 8\}$. En segundo lugar es necesario añadir dos aristas más en las que uno de sus extremos sea un vértice de grado impar y sin repetir ninguno (por ejemplo, las aristas $\{2, 8\}$ y $\{4, 6\}$). Ahora todos los vértices tienen grado par y el grafo es euleriano. En definitiva, el número mínimo de aristas adicionales que es necesario añadir es tres. ■

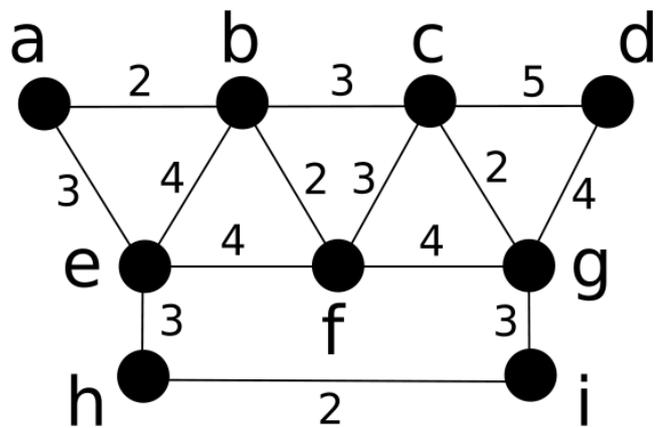
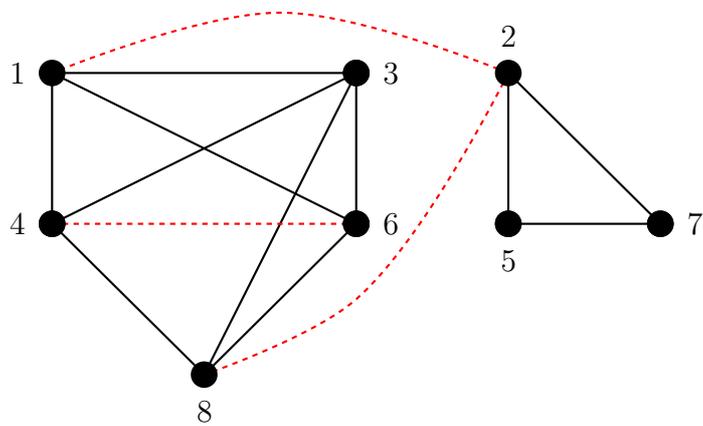
PROBLEMA 64.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

(c) Hallar un árbol generador de peso mínimo y el peso total de dicho árbol sobre el grafo.



SOLUCIÓN.

a) Es un grafo simple, pues solamente una arista una dos vértices. Es plano, pues se puede representar sin que las aristas se crucen. No es bipartido, pues hay ciclos de longitud 3. No es completo, pues no todos los vértices están unidos con todos. No es regular, ya que no todos los vértices tienen el mismo grado. Es conexo ya que sólo tiene una componente conexa.

b) Sí es euleriano, ya que el grado de todos los vertices es par. Un posible camino obtenible por Fleury sería:

$$\{a, b, e, f, b, c, f, g, c, d, g, i, h, e, a\}$$

c) Un árbol recubridor de peso mínimo obtenible por Kruskal sería:

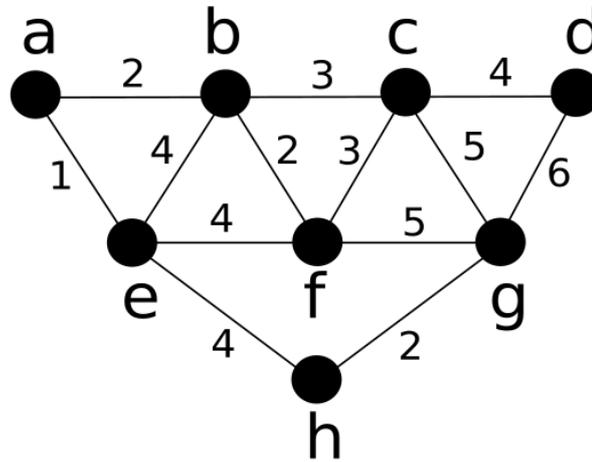
$$\{(ih), (he), (ea), (ab), (bf), (fc), (cg), (gd)\}$$



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

- (b) ¿Es Euleriano? Hallar un camino o circuito euleriano si es posible (como los vértices están etiquetados dar la secuencia de los mismos que definen el camino o circuito si existe).
- (c) Hallar un árbol generador de peso mínimo de y el peso total de dicho árbol sobre el grafo.



SOLUCIÓN.

a) Es un grafo simple, pues solamente una arista una dos vértices. Es plano, pues se puede representar sin que las aristas se crucen. No es bipartido, pues hay ciclos de longitud 3. No es completo, pues no todos los vértices están unidos con todos. No es regular, ya que no todos los vértices tienen el mismo grado. Es conexo ya que sólo tiene una componente conexa.

b) Sí es Euleriano, ya que el grado de todos sus vértices es par. Un posible camino que se puede obtener por Fleury sería:

$$\{a, b, e, f, b, c, f, c, g, d, c, g, h, e, a\}$$

c) Usando Kruskal es posible obtener un árbol recubridor de peso mínimo como este:

$$\{(gh), (he), (ea), (ab), (bf), (fc), (cd)\}$$

El peso de este árbol, o de cualquier otro árbol recubridor de peso mínimo sobre el grafo, es 18.

PROBLEMA 66:

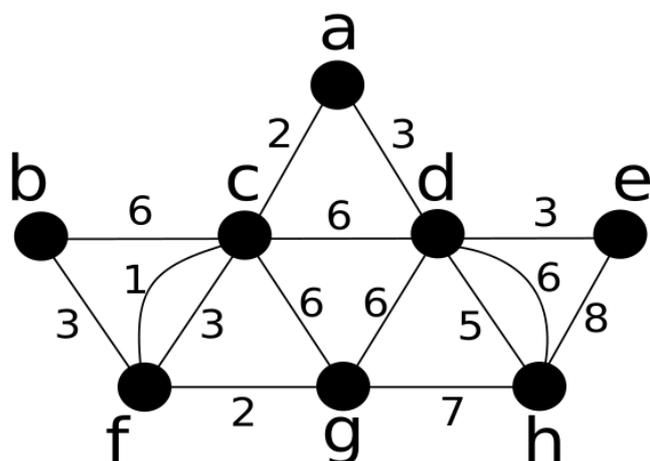
Sea el grafo de la figura de más adelante.

(a) ¿Es dicho un grafo simple? ¿Es plano? ¿Es bipartito? ¿Es completo? ¿Es regular? ¿Es

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99



SOLUCIÓN.

a) No es un grafo simple, es un multigrafo, pues a veces dos vértices son unidos por más de una arista. Es plano, pues se puede representar sin que las aristas se crucen. No es bipartido, pues hay ciclos de longitud 3. No es completo, pues no todos los vértices están unidos con todos. No es regular, ya que no todos los vértices tienen el mismo grado. Es conexo ya que sólo tiene una componente conexa.

b) Sí es Euleriano ya que el grado de todos sus vértices es par. Un posible camino que se puede obtener por Fleury sería:

$$\{a, c, b, f, (1)c, (3)f, g, c, d, g, h, (5)d, (6)h, e, d, a\}$$

d) Usando Kruskal se puede obtener un árbol recubridor como el siguiente:

$$\{(bf), (f1c), (fg), (ca), (ad), (d5h), (de)\}$$

El peso de este árbol, o de cualquier otro árbol recubridor de peso mínimo sobre el grafo, es 19.

PROBLEMA 67:

Sea la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, A, B, S\}$, $T = \{a, b\}$, S es el símbolo inicial y $P = \{S ::= ABa, A ::= BB, B ::= ab, AB ::= b\}$. ¿Se deriva la cadena $BBBa$ de ABa ?, ¿cómo?, ¿y ba ?

SOLUCIÓN.

Efectivamente la cadena $BBBa$ se deriva directamente de ABa en dicha gramática, puesto que $A ::= BB$ es una producción de dicha gramática. La cadena ba se deriva de ABa , puesto que

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

uuA . De uuA , mediante la producción $A ::= aaa$ se deriva $aaaaa$. También se puede usar la



producción $S ::= Ab$ para derivar Ab y a partir de aquí obtener $aaab$. Puesto que no puede derivarse ninguna otra palabra utilizando las producciones, se tiene que $L(G) = \{aaab, aaaaa\}$

PROBLEMA 69:

Determina si la palabra bab pertenece o no al lenguaje generado por la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, el subconjunto terminal es $T = \{a, b, c\}$, S es el símbolo inicial y las producciones $S ::= AB$, $A ::= Ca$, $B ::= Ba$, $B ::= Cb$, $B ::= b$, $C ::= cb$ y $C ::= b$.

SOLUCIÓN. Hay dos maneras de solucionar este problema. La primera utilizando una estrategia de análisis descendente y otra con un análisis ascendente. Utilizando la primera podemos partir del símbolo inicial y utilizar las producciones hasta llegar a bab . De este modo $S \Rightarrow AB$ y usar la producción $A ::= Ca$ para obtener $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB$. Luego usando $B ::= b$ llegamos a $CaB \Rightarrow Cab$ finalmente usando $C ::= b$ llegamos a $Cab \Rightarrow bab$. Por tanto bab sí pertenece al lenguaje.

PROBLEMA 70:

A) Sea la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial. Las producciones son $S ::= 0S1$ y $S ::= \lambda$. La gramática que genera será $C = \{0^n 1^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ en donde hemos empleado la notación de tal modo que C es el conjunto de cadenas del tipo 000...,111... en donde hay n ceros seguidos de n unos.

Construye una derivación (secuencia) que partiendo del elemento inicial llegue hasta $0^3 1^3$ (tres ceros seguidos de tres unos) utilizando la gramática anterior.

B) Sean la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, 2, S, A, B\}$, $T = \{0, 1, 2\}$ y S es el símbolo inicial. Las producciones son $S ::= 0SAB$, $S ::= \lambda$, $BA ::= AB$, $0A ::= 01$, $1A ::= 11$, $1B ::= 12$ y $2B ::= 22$. Se puede demostrar que el conjunto generado es $C = \{0^n 1^n 2^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$

Construye una derivación (secuencia) que partiendo del elemento inicial llegue a $0^2 1^2 2^2$ utilizando la gramática anterior. Pista: la secuencia pedida puede empezar así

$$S0SAB \Rightarrow 00SABAB \Rightarrow 00ABAB \Rightarrow 00AABB \dots$$

SOLUCIÓN.

A) $S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000111$

B) $S \Rightarrow 0SAB \Rightarrow 00SABAB \Rightarrow 00ABAB \Rightarrow 00AABB \Rightarrow 001ABB \Rightarrow 0011BB \Rightarrow 00112B \Rightarrow 001122$

PROBLEMA 71:

Construye una derivación de $0^2 1^4$ con estas dos gramáticas distintas

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

Para la segunda gramática podemos construir esta derivación:

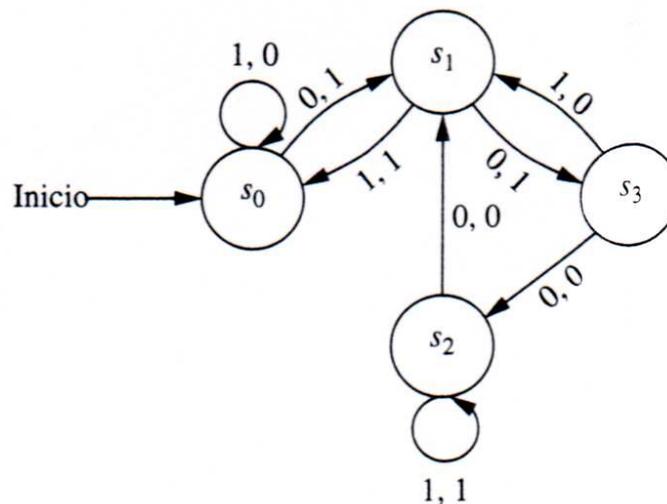
$$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 001A \Rightarrow 0011A \Rightarrow 00111A \Rightarrow 001111$$

PROBLEMA 72:

Las tablas de transición y de salida de una máquina secuencial o máquina de estado finito son las siguientes:

<i>f</i>	<i>Entrada</i>		<i>g</i>	<i>Entrada</i>	
<i>Estado</i>	0	1	<i>Estado</i>	0	1
s_0	s_1	s_0	s_0	1	0
s_1	s_3	s_0	s_1	1	1
s_2	s_1	s_2	s_2	0	1
s_3	s_2	s_1	s_3	0	0

De las que se puede deducir el siguiente diagrama de estados:



Hallar la cadena de salida generada por la máquina de estado finito del ejercicio anterior si la cadena de entrada es 11011011.

SOLUCIÓN.

00110110

Los sucesivos estados con sus salidas son:

<i>Entrada</i>	1	1	0	1	1	0	1	1	—
<i>Estado</i>	s_0	s_0	s_0	s_1	s_0	s_0	s_1	s_0	s_0
<i>Salida</i>	0	0	1	1	0	1	1	0	—

PROBLEMA 73:

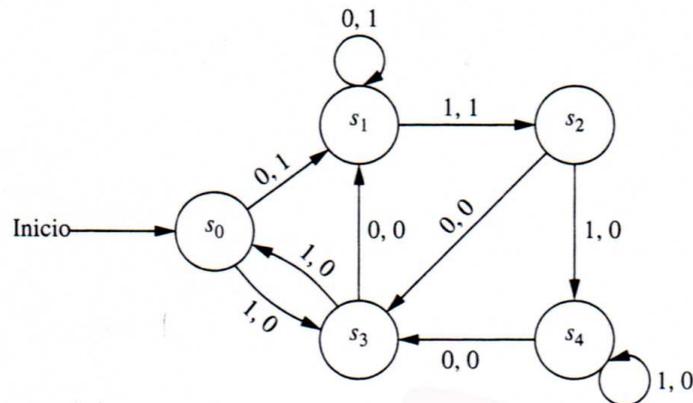


**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

s_4	s_3	s_4	s_4	0	0
-------	-------	-------	-------	---	---

De las que se puede deducir el siguiente diagrama de estados:



Hallar la cadena de salida generada por la máquina de estado finito del ejercicio anterior si la cadena de entrada es 11011011

SOLUCIÓN.

Los sucesivos estados con sus salidas son:

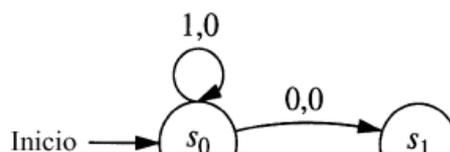
<i>Entrada</i>	1	1	0	1	1	0	1	1	—
<i>Estado</i>	s_0	s_3	s_0	s_1	s_2	s_4	s_3	s_0	s_3
<i>Salida</i>	0	0	1	1	0	0	0	0	—

PROBLEMA 74:

Hállese el diagrama de estados para una máquina de estado finito cuyas tablas de transición y de salida son las siguientes:

<i>f</i>	<i>Entrada</i>		<i>g</i>	<i>Entrada</i>	
<i>Estado</i>	0	1	<i>Estado</i>	0	1
s_0	s_1	s_0	s_0	0	0
s_1	s_2	s_0	s_1	1	1
s_2	s_0	s_3	s_2	0	1
s_3	s_1	s_2	s_3	1	0

SOLUCIÓN.



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

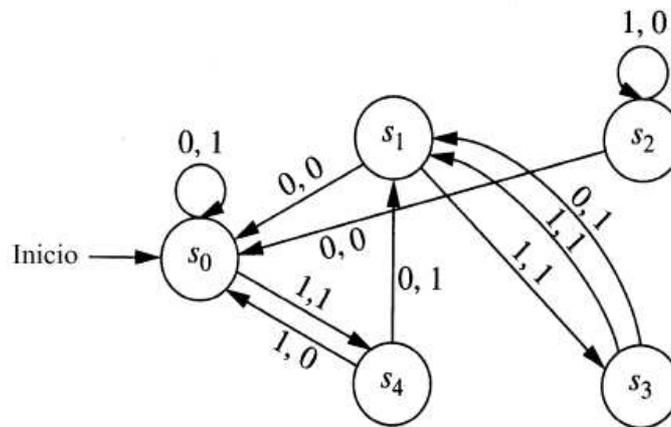


PROBLEMA 75:

Hállese el diagrama de estados para una máquina de estado finito cuyas tablas de transición y de salida son las siguientes:

<i>f</i>	<i>Entrada</i>		<i>g</i>	<i>Entrada</i>	
<i>Estado</i>	0	1	<i>Estado</i>	0	1
<i>s</i> ₀	<i>s</i> ₀	<i>s</i> ₄	<i>s</i> ₀	1	1
<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₀	<i>s</i> ₃	<i>s</i> ₁	0	1
<i>s</i> ₂	<i>s</i> ₀	<i>s</i> ₂	<i>s</i> ₂	0	0
<i>s</i> ₃	<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₃	1	1
<i>s</i> ₄	<i>s</i> ₁	<i>s</i> ₀	<i>s</i> ₄	1	0

SOLUCIÓN.



PROBLEMA 76:

Sea la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, A, B, S\}$, $T = \{a, b\}$, S es el símbolo inicial y $P = \{S ::= ABa, A ::= BB, B ::= ab, AB ::= b\}$. ¿Se deriva la cadena $Aaba$ de ABa ?, ¿cómo?, ¿y la cadena $abababa$?

SOLUCIÓN.

Efectivamente la cadena $Aaba$ se deriva directamente de ABa en dicha gramática, puesto que $B ::= ab$ es una producción de dicha gramática. La cadena $abababa$ se deriva de ABa , puesto que $ABa \Rightarrow Aaba \Rightarrow BBaba \Rightarrow Bababa \Rightarrow bababa$ usando las producciones $B ::= ab$, $A ::= BB$, $B ::= ab$ y $B ::= ab$ sucesivamente.

PROBLEMA 77:

Sea la gramática con vocabulario $V = \{S, A, a, b\}$, conjunto terminales $T = \{a, b\}$, símbolo inicial S y las producciones $P = \{S ::= aA, S ::= b, A ::= aa\}$. ¿Cuál es el lenguaje $L(G)$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

PROBLEMA 78:

Determina si la palabra $cbab$ pertenece o no al lenguaje generado por la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, el subconjunto terminal es $T = \{a, b, c\}$, S es el símbolo inicial y las producciones $S ::= AB$, $A ::= Ca$, $B ::= Ba$, $B ::= Cb$, $B ::= b$, $C ::= cb$ y $C ::= b$.

SOLUCIÓN.

Hay dos maneras de solucionar este problema. La primera utilizando una estrategia de análisis descendente y otra con un análisis ascendente. Utilizando la primera podemos partir del símbolo inicial y utilizar las producciones hasta llegar a $cbab$. De este modo $S \Rightarrow AB$ y usar la producción $A ::= Ca$ para obtener $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB$. Puesto que $cbab$ comienza por cb utilizamos la producción $C ::= cb$. Esto da lugar a $A ::= Ca$ para obtener $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB \Rightarrow cbab$. También se podría haber partido de $cbab$ y usar producciones en hasta llegar a S (análisis ascendente).

PROBLEMA 79:

Determina si las palabras de la lista de abajo pertenecen o no al lenguaje generado por la gramática $G = \{V, T, S, P\}$, donde $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, el subconjunto terminal es $T = \{a, b, c\}$, S es el símbolo inicial y las producciones $S ::= AB$, $A ::= Ca$, $B ::= Ba$, $B ::= Cb$, $B ::= b$, $C ::= cb$ y $C ::= b$.

a) $baba$ b) $abab$ c) $cbaba$ d) $bbbcb$

SOLUCIÓN.

Sí, No, Sí, No.

PROBLEMA 80:

¿Qué conjunto genera la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial? Las producciones son $S ::= 0S1$ y $S ::= \lambda$.

Notación: Podemos denotar un conjunto $C = \{0^n 1^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ como el conjunto de cadenas del tipo $000\dots, 111\dots$ en donde hay n ceros seguidos de n unos.

SOLUCIÓN.

Será precisamente $C = \{0^n 1^n | n = 0, 1, 2, \dots\}$

PROBLEMA 81:

¿Qué conjunto genera la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$ y S es el símbolo inicial? Las producciones son $S ::= 0S$, $S ::= S1$ y $S ::= \lambda$.

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena99" in a stylized, blue, serif font. The "99" is significantly larger and more prominent than the rest of the word. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a soft shadow effect.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

SOLUCIÓN.

El conjunto pedido es $\{0^m 1^n \mid m \text{ y } n \text{ enteros no negativos}\}$

PROBLEMA 83:

decir si la gramática $G = \{V, T, S, P\}$ en donde $V = \{S, A, B, a, b\}$, $T = \{a, b\}$ es una gramática de tipo 0, pero no de tipo 1; de tipo 1, pero no de tipo 2, o una gramática de tipo 2 pero no de tipo 3, etc, si P, el conjunto de producciones, es:

- a) $S ::= aAB, A ::= Bb, B ::= \lambda$
- b) $S ::= aA, A ::= a, A ::= b$
- c) $S ::= ABa, AB ::= a$
- d) $S ::= ABA, A ::= aB, B ::= ab$
- e) $S ::= bA, A ::= B, B ::= a$

SOLUCIÓN.

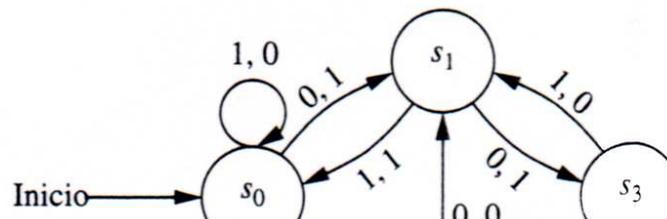
- a) de tipo 2 pero no de tipo 3.
- b) de tipo 3.
- c) de tipo 0, pero no de tipo 1.
- d) de tipo 2, pero no de tipo 3.
- e) de tipo 2.

PROBLEMA 84:

Las tablas de transición y de salida de una máquina de estado finito son las siguientes:

<i>f</i>	<i>Entrada</i>		<i>g</i>	<i>Entrada</i>	
<i>Estado</i>	0	1	<i>Estado</i>	0	1
s_0	s_1	s_0	s_0	1	0
s_1	s_3	s_0	s_1	1	1
s_2	s_1	s_2	s_2	0	1
s_3	s_2	s_1	s_3	0	0

De las que se puede deducir el siguiente diagrama de estados:



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

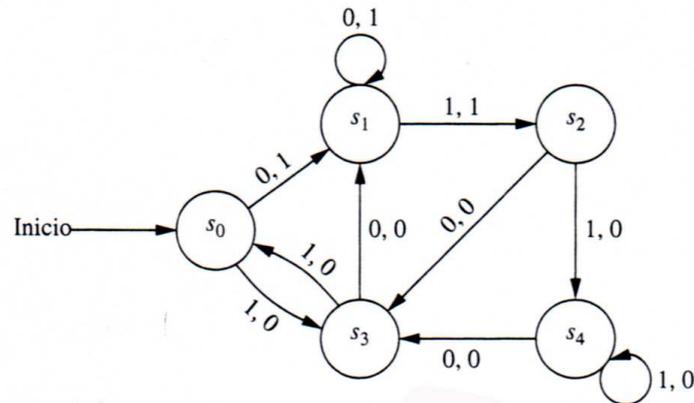
**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



Hállese el diagrama de estados para una máquina de estado finito cuyas tablas son:

<i>f</i>	<i>Entrada</i>		<i>g</i>	<i>Entrada</i>	
	<i>Estado</i> 0	1		<i>Estado</i> 0	1
s_0	s_1	s_3	s_0	1	0
s_1	s_1	s_2	s_1	1	1
s_2	s_3	s_4	s_2	0	0
s_3	s_1	s_0	s_3	0	0
s_4	s_3	s_4	s_4	0	0

SOLUCIÓN.



PROBLEMA 85:

Hallar la cadena de salida generada por la máquina de estado finito del ejercicio anterior si la cadena de entrada es 101011

SOLUCIÓN.

001000

Los sucesivos estados con sus salidas son:

<i>Entrada</i>	1	0	1	0	1	1	—
<i>Estado</i>	s_0	s_3	s_1	s_2	s_3	s_0	s_3
<i>Salida</i>	0	0	1	0	0	0	—

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70