

1. EJERCICIOS

1. En el espacio euclídeo usual \mathbb{R}^4 se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + t = 0\}$$

y

$$W_2 = L\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}$$

Hallar:

- Las ecuaciones de W_1^\perp y una base ortonormal de W_1^\perp .
 - Las ecuaciones del complemento ortogonal W_2^\perp y una base ortogonal para W_2 .
2. Dada la forma bilineal simétrica sobre \mathbb{R}^3 , $F(x, y) = x^t A y$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Determinar para qué valores de "a" define F un producto escalar.
 - Para $a = 1$, ¿son ortogonales los vectores $(1, 1, 1)$ y $(2, -1, -1)$?
3. Si F es la forma bilineal en \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada con respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

determinar los valores de "a" para los que F define un producto escalar.

4. Sea $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida en la base canónica por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

- b) En el espacio euclídeo real $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que define Q se pide:
- Calcular la distancia y ángulo entre los vectores $u = (1, 1, 1, 1)$ y $v = (1, 1, 0, 0)$.
 - Obtener las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal al subespacio vectorial $U = L\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$.
 - Determinar una base ortonormal del subespacio vectorial $V = L\{(1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1)\}$.
5. Dado \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual, calcular:
- La proyección del vector $(1, 0, 0)$ sobre el subespacio $U \equiv x + y = 0$.
 - La proyección del vector $(1, 2, 3)$ sobre el subespacio $W = L\{(1, 0, 1)\}$.
6. En \mathbb{R}^4 , con el producto escalar usual, se considera el subespacio

$$U = L\{(0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$$

Se pide:

- Hallar una base ortonormal de U .
 - Hallar las proyecciones sobre U y sobre U^\perp del vector $v = (1, 2, 3, 4)$.
7. En \mathbb{R}^4 , con el producto escalar usual, utilizar el método de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal a partir de los vectores

$$\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$$

8. En \mathbb{R}^4 , con el producto escalar usual, obténgase la proyección ortogonal del vector $v = (1, 0, 3, 2)$ sobre el subespacio

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tales que } x + y + z - t = 0, x - 2y + z + t = 0\}$$

9. Obtener la matriz, expresada con respecto a la base canónica, de la proyección ortogonal de \mathbb{R}^4 sobre el subespacio

$$W = L\{(1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

11. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ¿qué tipo de movimiento determina? Pruébese que A mantiene invariantes las distancias entre vectores, esto es, la distancia entre $\bar{x} = (x_1, x_2)$ y $\bar{x}' = (x'_1, x'_2)$ es la misma que la distancia entre $A\bar{x}$ y $A\bar{x}'$.

12. Caracterícense las isometrías de \mathbb{R}^2 dadas por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Encuéntrese, en \mathbb{R}^2 , la matriz de la simetría ortogonal con respecto a la recta $2x - y = 0$.

14. Encuéntrense las matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ que actúan en el espacio del siguiente modo:

- Proyectando todos los vectores sobre el plano XY .
- Reflejando todos los vectores a través del plano XY .
- Rotando el plano XY un ángulo $\pi/2$ y llevando cada vector del eje Z a dos veces él mismo.
- Rotando primero el plano XY un ángulo $\pi/2$ y dejando fijo el eje Z , rotando después el plano XZ un ángulo $\pi/2$ y dejando fijo el eje Y , y rotando después el plano YZ un ángulo $\pi/2$ y llevando cada vector del eje X a tres veces él mismo.

¿Determina alguna de esas matrices una isometría?

15. Dada la transformación ortogonal de \mathbb{R}^3 determinada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se pide clasificarla y encontrar los subespacios propios

16. Dada la transformación ortogonal de \mathbb{R}^3 determinada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

17. Dado el endomorfismo de \mathbb{R}^3

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z),$$

probar que es una isometría y caracterizarla geoméricamente.

18. Diagonalizar por semejanza ortogonal la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

The logo for 'Cartagena99' features the text 'Cartagena99' in a stylized, blue, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The text is set against a light blue, abstract background that resembles a stylized map or a splash of paint. Below the text, there is a horizontal orange and yellow gradient bar.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**