

Cálculo Numérico I

CURSO 2014-2015

Lista 6

1º DE MAT./D.G.

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrar una descomposición $A = QR$ por Gram-Schmidt.

2. Sea $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sea $T_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la transformación asociada ($T_P(x) = Px$):

a) Demostrar que

$$T_P \text{ es una proyección ortogonal} \Leftrightarrow P^T = P \text{ y } P^2 = P.$$

b) Demostrar que si P da lugar a la proyección ortogonal sobre un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ entonces $I - P$ representa la proyección ortogonal sobre $V^\perp$.

c) Sea $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz ortogonal. Demostrar que $U^2 = I$ si y sólo si U tiene la forma $I - 2P$, donde P es una proyección ortogonal.

3. a) Sea

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar una factorización $B = QR$ y explicar qué dos posibilidades hay para las dimensiones de los factores Q y R y cómo se relacionan esas dos opciones.

b) Sea ahora $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, con $m > n$ y con rango n . Si quisiésemos resolver el problema

$$\text{encontrar el } x \text{ tal que } \|b - Bx\|_2 \text{ es mínimo} \quad (*)$$

se podría usar la descomposición QR de B para reducirlo a la resolución de un sistema lineal triangular ¿qué sistema? Justificar la respuesta.

c) Indicar el número de operaciones (en orden de magnitud) que se realizan para resolver el problema (*) del apartado anterior.

Nota: al contar separar la parte de la descomposición QR de la correspondiente a la resolución del sistema triangular.

4. Se consideran las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Calcular sus factorizaciones QR.

b) Utilizar estas factorizaciones para resolver, en el sentido de los mínimos cuadrados, los sistemas sobredeterminados

$$A_1 x = b, \quad A_2 x = b,$$

donde b es el vector columna $(1, 2, 3, 4)^T$.

- c) Denotando por x_1, x_2 las respectivas soluciones, calcular los residuos $r_j = A_j x_j - b$, $j = 1, 2$. ¿A qué se debe la diferencia entre los dos resultados?
5. Sea $b \in \mathbb{R}^m$ y sean A, T matrices de tamaños $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente, tales que $\ker A = 0$, $\ker T = 0$. Ponemos $A_1 = AT$. Sean x, x_1 las soluciones de los sistemas lineales $Ax = b$ y $A_1 x_1 = b$ en el sentido de mínimos cuadrados.
- a) Demostrar la siguiente desigualdad para los residuos: $\|Ax - b\| \leq \|A_1 x_1 - b\|$.
- b) Demostrar que, en el caso $n = p$, se tiene la igualdad de los residuos.
6. (**matlab**) La función real f viene dada por su tabla de valores en los puntos $0, 1, \dots, n$, obtenidos de un experimento. Se pide encontrar su mejor aproximación, en el sentido de mínimos cuadrados, por un polinomio P_m de grado m .
- a) Escribir un programa que calcula estas aproximaciones y dibuja simultáneamente las gráficas de f y de P_3, P_5 y P_{10} .
- b) Aplicar este programa para el caso $n = 100$ y las funciones
- $f_1(x) = e^{x/10}$
 - $f_2(x) = 1/((x - 50)^2 + 4)$.
7. Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 0 \\ 1 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$.
- a) Aproximar, por el método de las potencias, su autovalor más grande.
Nota: se puede hacer una buena elección del v_0 inicial.
- b) Aproximar el autovalor más pequeño de A utilizando potencias inversas.
- c) Aproximar el autovalor intermedio utilizando potencias inversas con desplazamiento.
8. Sea $D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ una matriz simétrica cuyos autovalores son $-7, -3, 1, 5$.
- a) Si se usa el método de la potencia, ¿a qué autovalor podemos esperar convergencia? ¿por qué?
- b) Supongamos que no conocemos el autovalor -3 pero sí el resto (es decir, $-7, 1$ y 5) y sabemos que el que falta está entre -3.5 y -2 . Proponer un algoritmo (decir cuál y describirlo) para calcular el autovalor -3 y decir qué velocidad de convergencia se puede esperar de dicho algoritmo y por qué.