Cálculo Numérico I

1) Hallar los polinomios interpoladores de segundo grado con nodos en los puntos $0, 1, -1$ y estimar el error máximo de interpolación en el intervalo $[-1, 1]$ para las funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$;

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + x - 1$;

c) $f(x) = 1/(x + 2)$.

2) Dados los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_N$ de interpolación, se denotan por $L_0, L_1, \ldots, L_N$ los polinomios de Lagrange asociados a esos nodos. Como ya se ha visto cumplen

$$L_j(x_j) = 1$$
$$L_j(x_k) = 0 \text{ si } k \neq j$$

Demostrar que $L_0, L_1, \ldots, L_N$ son linealmente independientes y forman una base para el espacio de polinomios de grado $\leq N$.

3) Para la función $\sin(x)$:

a) Hallar el polinomio interpolador de tercer grado con nodos en los puntos $0, \pi/4, 3\pi/4, \pi$ y dar una cota superior para el error en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Hallar el polinomio interpolador de cuarto grado con nodos en los puntos $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ y dar una cota superior para el error en el intervalo $[0, \pi]$.

c) (**matlab**) Representar en un mismo gráfico la función seno y esos dos polinomios interpoladores. En cada caso estimar el error máximo y comparar con la cota superior teórica obtenida en los apartados anteriores.

4) Se quiere construir una tabla de logaritmos decimales para los valores de x entre 1 y 10, de forma que interpolando linealmente sus valores se obtengan cuatro cifras decimales correctas. Determinar cuál debe ser el paso de la tabla y cuantas cifras decimales correctas deben tener los valores de la tabla.

5) Supongamos que queremos aproximar $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ en el intervalo [0,2] con un error menor que $0,00001$ usando interpolación lineal a trozos en nodos equiespaciados. Estimar el mínimo número de puntos necesarios.

6) Se considera el polinomio $\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ para nodos igualmente espaciados entre sí a una distancia h.

a) Demostrar que $|\pi_n(x)| \leq n!h^{n+1}$ si $x_0 \leq x \leq x_n$.

b) Si $P_n(x)$ es el polinomio de interpolación de la función $f(x) = e^x$ en $[0, 1]$ con nodos igualmente espaciados, usar el resultado anterior para demostrar que

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |e^x - P_n(x)| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

7) (**matlab**) Se considera la función $f(x) = 1/(1 + x^2)$ definida en el intervalo $[-5, 5]$.

a) Sea $p_n(x)$ el polinomio interpolador de $f(x)$ de grado n para puntos equiespaciados del intervalo $[-5, 5]$, incluyendo los extremos.

- Encontrar p_n para $n = 2, 5, 15, 50$. Dibujar, superpuestos, los gráficos de $f(x)$ y todos esos polinomios.
- Calcular $\max_{-5 \leq x \leq 5} |f(x) - p_n(x)|$, de manera aproximada, y estudiar su dependencia de n.
- La función $\pi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$ está relacionada con esos errores. Dibujar los gráficos de las π_n's para $n = 2, 5, 15, 50$.
- Si se escribe el sistema lineal que los coeficientes de $p_n(x)$ resuelven y A es la matriz correspondiente, estudiar cómo varía el número de condición de A en función de n.

b) Se consideran ahora los nodos de interpolación $x_0, x_1, \ldots x_n$ dados por $x_k = 5\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ (los nodos de Chebyshev).

- Repetir el apartado anterior en este caso.
- Para $n = 2$, 5, 15 y 50, comparar gráficamente el π_n que se obtiene en esta situación con el π_n para nodos equiespaciados.

c) Para $n = 15$ y $n = 20$:

- Hacer una aproximación por *splines* cúbicos $sp_n(x)$ y nodos equiespaciados.
- Dibujar, superpuestos, los gráficos de $f(x)$ y las aproximaciones por esos *splines*.
- calcular $\max\limits_{-5\leq x\leq 5} |f(x) - sp_n(x)|$ de manera aproximada y comparar con el caso del polinomio interpolador.
- Repetir lo anterior para los nodos de Chebyshev.

Nota: Las funciones de Matlab `polyfit`, `poly`, `polyval`, `vander`, `cond` y `spline` son útiles para este ejercicio.

8) Usar las formas de Lagrange y de Newton del polinomio de interpolación para obtener la siguiente igualdad:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_N] = \sum_{i=0}^{N} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_N)}$$

9) (Interpolación de Hermite) Dada una función $f(x)$ que es C^1 en el intervalo $[a, b]$ y nodos $x_0, x_1, \ldots, x_N$ en ese intervalo se busca un polinomio $p(x)$ de grado mínimo que cumpla, para $j = 0, 1, 2, \ldots, N$:

$$p(x_j) = f(x_j) \quad p'(x_j) = f'(x_j)$$

Para $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ se definen:

$$H_n(x) = L_n^2(x)\,(1 - 2L_n'(x_n)(x - x_n)) \quad K_n(x) = L_n^2(x)(x - x_n)$$

donde los L_n's son los polinomios de Lagrange.

a) Demostrar que para todo n y todo k se tiene:

$$H_n(x_k) = \delta_{nk} \quad H_n'(x_k) = 0 \quad K_n(x_k) = 0 \quad K_n'(x_k) = \delta_{nk}$$

b) Demostrar que si se define

$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} f(x_n)H_n(x) + \sum_{n=0}^{N} f'(x_n)K_n(x)$$

entonces $p(x_k) = f(x_k)$ y $p'(x_k) = f'(x_k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, N$. ¿Qué grado tiene $p(x)$?

10) (*)

a) Se considera una función $f(x)$ y nodos de interpolación $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Sean:

- $p(x)$ el polinomio interpolador de f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (grado n)
- $q(x)$ el polinomio interpolador de f en $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ (grado n)
- $r(x)$ el polinomio interpolador de f en $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ (grado $n + 1$)

Demostrar que

$$r(x) = \frac{(x - x_0)q(x) - (x - x_{n+1})p(x)}{x_{n+1} - x_0}$$

b) Si denotamos por $a_m(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ el coeficiente del término x^m en el polinomio interpolador de f en los puntos $z_0, z_1, \ldots, z_m$ (el coeficiente del término de mayor grado), usar el apartado anterior para demostrar que

$$a_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{a_n(x_1, \ldots, x_{n+1}) - a_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)}{x_{n+1} - x_0}$$

Claramente $a_0(x_0) = f(a_0)$.

c) Concluir que si $p_N(x)$, el polinomio interpolador de $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_N$, se escribe en la forma de Newton

$$p_N(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_N(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{N-1})$$

entonces $b_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ para todo $n \geq 0$.