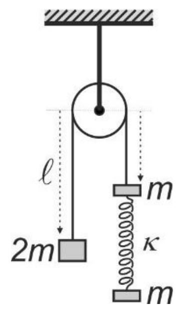
MECÁNICA Y ONDAS I

Curso 2019/2020. Grupo 521
Hoja 5. MECANICA HAMILTONIANA

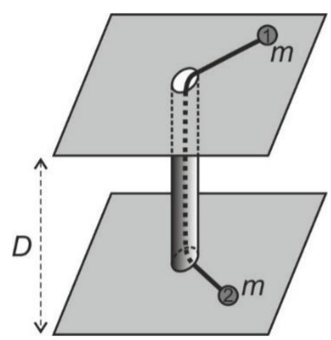
1 ***Formulación hamiltoniana: máquina de Atwood con pesas compuestas***

Una polea muy pequeña se utiliza para colgar mediante una cuerda inextensible de longitud ℓ y muy ligera las pesas mostradas en la figura. En el extremo izquierdo de la cuerda se sujeta una masa $2m$ mientras que del lado derecho pende una masa m de la cual, a su vez, cuelga otra masa m unida a la anterior por medio de un muelle ideal de constante elástica κ y longitud natural nula. Todo el movimiento tiene lugar a lo largo del eje vertical. (a) Escoger coordenadas adecuadas, calcular los momentos canónicos conjugados, determinar el hamiltoniano, y escribir las ecuaciones de Hamilton. Inicialmente todo el sistema está en reposo y la longitud del muelle es nula. Determinar el movimiento del sistema. (b) Si las coordenadas han sido bien escogidas, una de ellas será ignorable. Explicar físicamente en qué consiste la existencia de esta transformación de simetría. Opcional 1: comparar la situación anterior con aquella otra en la que ninguna de las coordenadas elegidas sea ignorable. Opcional 2: considerar el caso en que la masa inferior derecha es $m + m'$.



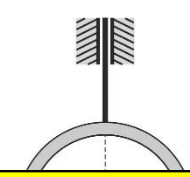
2 ***Coordenadas ignorables, reducción del número de grados de libertad, y diagramas de fases: el "agujero de gusano"***

Considerar dos planos horizontales fijos separados una distancia $D > 0$ conocida (ver figura). Dos partículas de idéntica masa m están confinadas en sus respectivos planos, de modo que pueden desplazarse por ellos (no hay rozamiento). Las masas están conectadas por una cuerda inextensible y muy liviana de longitud $2D$. Dicha cuerda, que se encuentra en tensión, está enhebrada a lo largo de un tubo fijo muy estrecho que conecta ambos planos y es perpendicular a los mismos. (a) Especificar el número de grados de libertad, hallar el hamiltoniano, y escribir las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Discutir las cantidades conservadas. (b) Suponer que la velocidad inicial de la partícula 2 en el plano inferior *no* es paralela al segmento de cuerda que yace en dicho plano. Reducir el problema a otro equivalente con el menor número posible de grados de libertad. Representar los diagramas de fases correspondientes e interpretarlos. (c) Suponer que *ninguna* de las dos velocidades iniciales de las partículas es paralela al segmento de cuerda que yace en el correspondiente plano. Determinar, en función de las cantidades conservadas y los datos del enunciado, la solución para la cual las partículas permanecen a distancia constante de sus respectivos agujeros.



3 ***Cantidades conservadas y diagrama de fases: bifurcación en el péndulo simple en rotación***

Una partícula de masa m se introduce en un tubo con forma de circunferencia de radio R de modo que queda ajustada al mismo pudiendo deslizar sin rozamiento por su interior. El centro del aro está fijo respecto a un cierto sistema de referencia inercial. Uno de sus diámetros, que se denominará el eje del sistema, se mantiene siempre en posición vertical mediante unos cojinetes. La partícula se desliza libremente sometida exclusivamente a la fuerza peso, mientras que un motor hace girar el aro en torno al eje



tiempo conocida, $\phi(t)$, y que el ritmo de rotación correspondiente no es uniforme. ¿Qué diferencias existen con el caso estudiado anteriormente?

4 ***Formalismo hamiltoniano para partícula cargada en campo electromagnético: acoplo mínimo***
Este ejercicio es continuación del ejercicio 3-4. Considerar una partícula de masa m y carga $q > 0$ sometida a un campo electromagnético descrito por los potenciales $V(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$. Se mostró en dicho ejercicio 3-4 que el efecto del campo electromagnético queda recogido en el potencial dependiente de la velocidad $U^{\text{em}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = q[V(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)]$. (a) Tomar coordenadas cartesianas y hallar el correspondiente hamiltoniano. (b) En el caso de un campo magnético homogéneo y constante en el tiempo los potenciales se pueden escoger como $V(\mathbf{x}, t) = 0$ y $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B} \times \mathbf{x}/2$, donde $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ es el campo magnético (vector constante conocido). Tomar coordenadas cilíndricas adecuadas y escribir las ecuaciones de Hamilton. (c) Discutir las cantidades conservadas y las coordenadas ignorables. Reducir el problema a una dimensión, esbozar los correspondientes diagramas de fases, y discutir cualitativamente el movimiento de la partícula. Esta descripción de la acción de campos electromagnéticos sobre partículas cargadas es fundamental en multitud de situaciones, por ejemplo, para la comprensión del efecto de un campo magnético sobre un átomo (efecto *Zeeman*).