MECÁNICA Y ONDAS I

Curso 2019/2020. Grupo 521. Hoja 7
SISTEMAS DE PARTÍCULAS: FUERZAS CENTRALES Y COLISIONES

1 Para un sistema de dos partículas que interactúan únicamente bajo la acción de una fuerza interna central y conservativa (y por lo tanto esféricamente simétrica) $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}}\, f(r)$, hemos demostrado en las clases de teoría que el movimiento relativo es bidimensional, $\mathbf{r} = (x, y, 0)$, donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es la posición relativa de la partícula 1 respecto a 2. Las ecuaciones del movimiento relativo por los tanto son

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}\, f(r),$$

donde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida. Usando coordenadas generalizadas polares $\mathbf{q} = (r, \phi)$, y mediante el formalismo Lagrangiano o Hamiltoniano, se han derivado las siguientes ecuaciones del movimiento para las componentes r y ϕ de $\mathbf{q}$:

$$\mu\ddot{r} = \frac{\ell^2}{\mu r^3} + f(r)$$
$$\ell = \mu r^2\dot{\phi} = \text{const} .$$

Demonstrar que las mismas ecuaciones se pueden derivar directamente de su forma vectorial, $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}\, f(r)$, evaluando las componentes en dirección radial $\hat{\mathbf{r}}$ y tangencial $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ del vector aceleración relativa, $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = a_r\hat{\mathbf{r}} + a_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$ (Sugerencia: estimar las derivadas temporales $\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ y $\frac{d\hat{\boldsymbol{\phi}}}{dt}$, evaluar el vector velocidad relativa $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$, y derivarlo nuevamente respecto al tiempo para obtener $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$).

2 Una partícula de masa m se encuentra sometida a un campo de fuerzas central y atractivo cuyo módulo es km/r^4, donde k es una constante positiva y r es la distancia de la partícula al centro de fuerzas O. Suponer que el momento angular J de la partícula respecto a O es conocido y distinto de cero. (a) Demostrar que existen órbitas circulares y hallar su radio y energía mecánica en función de los datos del problema; ¿son estables? (b) Representar el diagrama de fases correspondiente a la coordenada radial. Explicar los diferentes comportamientos posibles de la partícula en función de su energía mecánica. (c) Inicialmente la distancia de O a la partícula es R, la velocidad de la misma es perpendicular a la línea que une O con m, y su módulo es $(2k/(3R^3))^{1/2}$. Mostrar que la partícula cae al centro de fuerzas en un tiempo $\tau = 3\pi(3R^5/(2k))^{1/2}/8$.

3 Una partícula sometida a una fuerza central describe una trayectoria dada por la siguiente función en coordenadas polares:

$$r(\varphi) = a + b\ \sin(\varphi)\,.$$

Determinar el tipo de fuerza que actúa sobre la partícula. Repetir el ejercicio por la siguiente orbita: $r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$.

4 En este problema se quiere estudiar la precesión de un satélite que orbita alrededor de la tierra, teniendo en cuenta que la tierra no es perfectamente esférica si no ligeramente oblata. Asumimos que la fuerza central a la que está sometido el satélite y que tiene en cuenta la forma oblata de la tierra se pueda escribir como

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\frac{\gamma}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{k\mu}{r^3}\hat{\mathbf{r}}\ ,$$

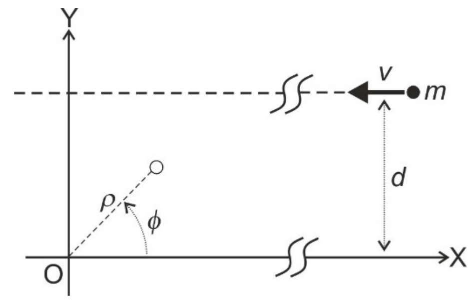
donde $\gamma = Gm_1m_2 = G\mu M$, μ es la masa reducida del problema y k es una constante positiva. Queremos discutir el movimiento de una partícula sometida a esta fuerza y demonstrar que la ecuación de la órbita puede corresponder a una elipse dotada de movimiento de precesión. Con este fin dividimos el problema en dos partes:

a) Considerar primero solo el caso de una partícula de masa m sometida a una fuerza central $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\frac{k\mu}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$ con centro de fuerzas situado en el origen de coordenadas O. Se desea determinar la órbita de la partícula en coordenadas polares, $r = r(\varphi)$, demostrando que la ecuación diferencial satisfecha por la función $u(\varphi)$, donde $u = 1/r$, es

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{k\mu^2}{\ell^2}\right) u = 0\,,$$

con ℓ denotando el valor del momento angular de la partícula respecto al origen del centro de fuerza.

b) Resolver esta ecuación para un caso concreto donde las condiciones iniciales (en $t \to -\infty$) son las siguientes: la partícula se encuentra a una distancia infinita del origen del centro de fuerza O, se mueve anti-paralelamente al eje X con parámetro de impacto d respecto a O, y el módulo de su velocidad es v (ver figura). Determinar las condiciones iniciales para la ecuación diferencial anterior, es decir $u(\varphi = 0)$ y $\left.\frac{du}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}$.



c) Resolver la ecuación diferencial suponiendo que se verifica $\frac{k}{(dv)^2} = \frac{8}{9}$. Representar $r(\varphi)$. ¿Cuál es el máximo ángulo φ posible? Representar la órbita en el plano XY.

d) Considerar ahora el problema completo, $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\frac{\gamma}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{k\mu}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$, y discutir la forma de las orbitas considerando los tres diferentes casos: $k\mu^2 < \ell^2$, $k\mu^2 = \ell^2$, y $k\mu^2 > \ell^2$. El caso relevante a la precesión de un satélite es cuando $k\mu^2 \ll \ell^2$.