# CÁLCULO PARA LA INGENIERÍA 1

## *PROBLEMAS RESUELTOS*

---

## Tema 3 Derivación de funciones de varias variables



---

## 3.1 Derivadas y diferenciales de funciones de varias variables

**3.1.1. Derivadas parciales de primer orden.** Se llama *derivada parcial* de una función $z=f(x,y)$ con respecto a la variable independiente $x$ al siguiente límite, si existe y es finito:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=f'_x(x,y)$$

calculado suponiendo $y$ constante.

Se llama *derivada parcial* de una función $z=f(x,y)$ con respecto a la variable independiente $y$ al siguiente límite, si existe y es finito:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=f'_y(x,y)$$

calculado suponiendo $x$ constante.

Para calcular las derivadas parciales son válidas las reglas y fórmulas de derivación ordinarias. Basta considerar que todas las variables son constantes (son números), salvo aquella respecto de la que estamos derivando.

Volver al comienzo de la página

---

**1.** Halla, aplicando la definición, las derivadas parciales de la función $f(x,y)=x^2y^3$

**Solución:**

Considerando $y$ como una constante, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2y^3-x^2y^3}{h}=\lim_{h\to 0}(2xy^3+hy^3)=2xy^3$$

Considerando $x$ como una constante, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{x^2(y+k)^3-x^2y^3}{k}=\lim_{k\to 0}(3x^2y^2+3x^2yh+x^2y^3)=3x^2y^2$$

Volver al comienzo de la página

---

**2** Dada la función $z$ definida por $z=x^3-3y^2+5xy+x-2y+5$ Halla $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

**Solución:**

Considerando $y$ como una constante, tenemos: $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+5y+1$

Considerando $x$ como una constante, tenemos: $\frac{\partial z}{\partial y}=-6y+5x-2$.

Volver al comienzo de la página

---

**3.** Dada la función $z$ definida por $z=(x^2+y^2)e^{-xy}$ Halla $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

**Solución:**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-xy}+(x^2+y^2)(-ye^{-xy})=(2x-x^2y-y^3)e^{-xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-xy}+(x^2+y^2)(-xe^{-xy})=(2y-x^3-xy^2)e^{-xy}.$$

Volver al comienzo de la Página

---

**4.** Dada la función *f* definida por $f(x,y,z)=\exp(x^3y^4z^5)$. Halla sus derivadas parciales en el punto *P (1,1,1).*

**Solución:**

Podemos elegir entre aplicar la definición de derivada en el punto *P(1, 1, 1).* o lo que es más fácil, calculamos las derivadas parciales y en ellas sustituimos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x^3y^4z^5}(3x^2y^4z^5) \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=[e^{x^3y^4z^5}(3x^2y^4z^5)]_{(1,1,1)}=3e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^{x^3y^4z^5}(4x^3y^3z^5) \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=[e^{x^3y^4z^5}(4x^3y^3z^5)]_{(1,1,1)}=4e$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=e^{x^3y^4z^5}(5x^3y^4z^4) \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=[e^{x^3y^4z^5}(5x^3y^4z^4)]_{(1,1,1)}=5e$$

Volver al comienzo de la Página

---

**5.** Calcula las derivadas, en el punto *P(0, 0),* de la función *f* definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \;\; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \;\; (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

**Solución:**

En este caso es más conveniente aplicar la definición de derivada en el punto *P(0, 0).* ya que si calculamos las derivadas parciales y en ellas sustituimos, nos encontramos con una indeterminación.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h\cdot 0}{h^2+0^2}-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot k}{0^2+k^2}-0}{k}=0$$

Volver al comienzo de la Página

---

**6.** Prueba que la función *f* definida por $f(x,y)=3x^2y^4-12x^6+2xy^5$ satisface la ecuación:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=6f(x,y)$$

**Solución:**

Hallamos las derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6xy^4-72x^5+2y^5\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=12x^2y^3+10xy^4$$

Sustituimos las expresiones halladas en el primer miembro de la ecuación y operamos:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=x(6xy^4-72x^5+2y^5)+y(12x^2y^3+10xy^4)=\rightarrow$$

$$\rightarrow=18x^2y^4-72x^6+12xy^5=6(3x^2y^4-12x^6+2xy^5)=6f(x,y)$$

Volver al comienzo de la Página

---

**3.1.2. Diferencial total y cálculo aproximado.** Se llama *incremento total* de una función $z=f(x,y)$ en un punto $P(x,y)$ a la diferencia $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)$ donde $\Delta x$ y $\Delta y$ son incrementos arbitrarios de los argumentos.

Se llama *diferencial total* de la función $z=f(x,y)$ a la siguiente expresión (si la función es diferenciable) $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ (si la función no es diferenciable esta expresión no tiene ningún significado).

Una función se dice que es diferenciable en el punto $P(x,y)$ si el siguiente límite existe y es cero.

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

**Condiciones necesarias de diferenciabilidad:**

- Si la función $z=f(x,y)$ es diferenciable en un punto, entonces *es continua* en ese punto.
- Si la función $z=f(x,y)$ es diferenciable es un punto, entonces *existen las derivadas parciales* $f_x$ y $f_y$ en ese punto.

(los recíprocos de estos teoremas no son ciertos).

**Condiciones suficientes de diferenciabilidad:** Si las derivadas parciales son continuas en un punto, entonces la función es diferenciable en ese punto, pero si las derivadas parciales no son continuas, entonces no podemos asegurar nada.

**Cálculos aproximados:** La diferencial de una función se puede puede utilizar como aproximación del incremento.

$$\Delta z\approx dz\ \ \rightarrow\ \ f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x,y)+dz$$

Volver al comienzo de la Página

---

**7.** Calcula la diferencial total de la siguiente función: $f(x,y)=2x\,\text{sen}\,y-3x^2y^2$

**Solución:**

Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2\,sen\,y-6xy^2\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x\cos y-6x^2y$$

Por consiguiente:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\rightarrow df=(2\,sen\,y-6xy^2)dx+(2x\cos y-6x^2y)dy$$

Volver al comienzo de la Página

---

**8.** estudia la continuidad y diferenciabilidad de la siguiente función el el origen.

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \text{si}\ (x,y)\neq(0,0)\ \text{y}\ f(0,0)=0$$

**Solución:**

La función es continua y diferenciable en todo el plano, salvo, quizás, en el origen.

a) Continuidad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\cdot Ac.=0=f(0,0)$$

luego la función es continua en el punto $(0,0)$ , y por consiguiente en todo el plano.

b) Diferenciabilidad:

Hallamos las derivadas parciales en el origen aplicando la definición:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{(0+h)0}{\sqrt{(0+h)^2+0}}-0\right)=0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\left(\frac{0(0+k)}{\sqrt{0+(0+k)^2}}-0\right)=0$$

De donde,de ser diferenciable, su diferencial debería ser

$$df(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0\,dx+0\,dy=0$$

hallamos el incremento de la función en el origen:

$$\Delta f(0,0)=f(0+h,0+k)-f(0,0)=f(h,k)-0=\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

calculamos el límite que nos dice si es diferenciable:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hmh}{h^2+m^2h^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Luego el límite no está definido, por depender de $m$, y por lo tanto la función no es diferenciable en el origen.

Volver al comienzo de la Página

---

**9.** Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Solución:**

La función es continua y diferenciable en todo el plano, salvo quizás, en el origen.

a) Continuidad en el origen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot mx}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2} = f(m)$$

luego el límite no existe, y por tanto la función no es continua en el origen.

b) Diferenciabilidad en el origen:

Al no ser continua, la función no es diferenciable en el origen. No es necesario hacer el límite correspondiente. Si lo intentamos podemos comprobar que dicho límite no existe.

(en esta función existen las derivadas parciales en el origen (son ambas iguales a cero), y sin embargo es dicontinua en el origen y por lo tanto no es diferenciable).

Volver al comienzo de la Página

---

**10.** Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

**Solución:**

a) Continuidad. La función es continua en todo el plano por ser una función elemental.

b) Diferenciabilidad: Hallamos las derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

que son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ salvo quizás en el punto *P(0, 0)*.

Para estudiar la diferenciabilidad en el origen hallamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

que es un límite no existente, pues por la derecha vale +1 y por la izquierda -1. Entonces siendo la existencia de las derivadas parciales una condición necesaria para la diferenciabilidad concluimos que la función no es diferenciable en el origen, siendo diferenciable en el resto del plano por ser las derivadas parciales continuas.

Volver al comienzo de la Página

---

**11.** Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función: $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$

**Solución:**

Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2xe^{-(x^2+y^2)}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=-2ye^{-(x^2+y^2)}$$

que son funciones continuas, luego *f* es diferenciable, y por tanto continua en $\mathbb{R}^2$ .

Volver al comienzo de la Página

---

**12.** Estima $\sqrt{2'01^2+1'98^2+1'05^2}$ .

**Solución:**

Tomamos la función $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y como punto cercano en el que conocemos los valores de la función $P(x_0,y_0,z_0)=(2,2,1)$ , donde $f(2,2,1)=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3$ y los valores de los incrementos son: *h= 0'01, k=-0'02, r=0'05*.

Las derivadas parciales son:

$$f_x(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\to f_x(2,2,1)=\frac{2}{3}$$

$$f_y(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\to f_y(2,2,1)=\frac{2}{3}$$

$$f_z(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\to f_z(2,2,1)=\frac{1}{3}$$

de donde, haciendo $\Delta z\approx dz$ , es decir, $z=z_0+dz$ tenemos:

$$\sqrt{2'01^2+1'98^2+1'05^2}=3+\frac{2}{3}0'01-\frac{2}{3}0'02+\frac{1}{3}0'05=3'01$$

Volver al comienzo de la Página

**3.1.3. Derivadas parciales y diferenciales de órdenes superiores.** Se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de la función *z* = *f(x,y)* a las derivadas parciales de las derivadas parciales de primer orden.

Se usan las siguientes notaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)\ ;\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{yx}(x,y)\ ;\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$$

(se empieza derivando por la variable que está más cerca de la función)

Si las derivadas parciales son continuas, entonces las derivadas *cruzadas* son iguales.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

Igual se definen las derivadas parciales de tercer orden y de órdenes superiores.

Si las derivadas parciales son continuas entonces no dependen del orden en que se realicen, sino del número de veces que se derive respecto de cada una de las variables (aunque el resultado final sea igual, el cálculo puede resultar más complicado en un orden que en otro).

$$f_{xxy}=f_{xyx}$$

**Diferenciales de órdenes superiores:** Se llama *diferencial de segundo orden* de una función a la diferencial de su diferencial total:

$$d^2 z=d(dz)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Análogamente se define la diferencial de tercer orden.

$$d^3 z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

Se siguen unas reglas parecidas a las potencias:

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

Volver al comienzo de la Página

**13.** Calcula las derivadas parciales segunda de la función: $f(x,y)=sen(x^2 y)$

**Solución:**

Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy\cos(x^2y)\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2\cos(x^2y)$$

Derivando repetidamente obtenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y\cos(x^2y)-4x^2y^2 sen(x^2y)\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2x\cos(x^2y)-2x^3y\, sen(x^2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x\cos(x^2y)-2x^3y\, sen(x^2y)\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^4 sen(x^2y)$$

Volver al comienzo de la Página

---

**14.** Halla las derivadas parciales de tercer orden de la función: $f(x,y)=x^2+2xy^2-y^3$

**Solución:**

Hallamos las derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x,y)=2x+2y^2\quad f_y(x,y)=4xy-3y^2$$

Hallamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$f_{xx}(x,y)=2\ ;\ f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=4y\ ;\ f_{yy}(x,y)=4x-6y$$

Hallamos las derivadas parciales de tercer orden:

$$f_{xxx}(x,y)=0\ ;\ f_{xxy}(x,y)=0\ ;\ f_{xyy}(x,y)=4\ ;\ f_{yyy}(x,y)=-6$$

Volver al comienzo de la Página

---

**15.** Halla $d^2z$ de la función : $z=sen\,x\,sen\,y$

**Solución:**

Hallamos las derivadas parciales de primer orden:

$$z_x=\cos x\, sen\, y\ ;\ z_y=sen\, x\cos y$$

Hallamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$z_{xx}=-sen\,x\,sen\,y\ ;\ z_{xy}=z_{yx}=\cos x\cos y\ ;\ z_{yy}=-sen\,x\,sen\,y$$

Con lo cual:

$$d^2 z = -sen\, x\, sen\, y\, dx^2 + 2\cos x \cos y\, dx\, dy - sen\, x\, sen\, y\, dy^2$$

Volver al comienzo de la Página

---

**3.1.4. Derivada direccional y vector gradiente.** Se llaman *derivadas direccional* de la función *z = f(x,y)* en un punto *P(x,y)* en el *sentido* del vector $\vec{v} = \vec{PX}$ el siguiente límite si existe y es finito:

$$\frac{\partial z}{\vec{v}} = \lim_{X \to P} \frac{f(X) - f(P)}{|\vec{PX}|}$$

Para calcular este límite se toma el vector unitario $\vec{u}$ de la dirección del vector $\vec{v}$ (dividiéndolo por su módulo). Llamamos *t* a la longitud del vector $\vec{PX}$, es decir $t = |\vec{PX}|$ ,con lo cual $\vec{PX} = t\vec{u}$ , de donde $X = P + t\vec{u}$ , y el límite se reduce a la única variable *t*

$$\frac{\partial z}{\vec{v}} = \lim_{X \to P} \frac{f(X) - f(P)}{|\vec{PX}|} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P + t\vec{u}) - f(P)}{t}$$

Si la función *f(x, y)* es diferenciable, entonces la derivada direccional se calcula por la fórmula:

$$\frac{\partial z}{\vec{v}} = \frac{\partial z}{\partial x} u_1 + \frac{\partial z}{\partial y} u_2$$

(es decir la suma de los productos de las parciales por las componentes del vector unitario)

Si la función es de tres variables *z=f(x, y, z)* la derivada direccional se calcula de manera análoga:

$$\frac{\partial f}{\vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3$$

(Las parciales habrá que calcularlas en el punto correspondiente. Las componentes del vector unitario coinciden con los cosenos directores del vector director. Si la función no es diferenciable esta fórmula no es válida y hay que calcular el límite anterior).

Se llama *gradiente* de una función *z = f(x, y)* en un punto *P(x, y)* al vector que sale del punto *P y* sus componentes son las derivadas parciales de la función en dicho punto

$$grad\, z = \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Si la función es diferenciable entonces la derivada direccional se puede obtener como el producto escalar del gradiente por el vector unitario de dirección. (Si la función no es diferenciable entonces este producto no tiene sentido y hay que acudir a la definición).

$$\frac{\partial z}{\vec{v}} = \frac{\partial z}{\partial x} u_1 + \frac{\partial z}{\partial y} u_2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)(u_1, u_2) = \vec{\nabla} z \cdot \vec{u}$$

El gradiente indica el sentido de crecimiento más rápido de una función en un punto dado. La derivada direccional tiene su valor máximo en el sentido del gradiente y coincide con su módulo:

$$\left(\frac{\partial z}{\vec{v}}\right)_{max} = |grad\, z| = \sqrt{(z_x)^2 + (z_y)^2}$$

Si la función es de tres variables $u = f(x,y,z)$ el gradiente se define de forma análoga:

$$grad\ f=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Volver al comienzo de la Página

---

**16.** Calcula, aplicando la definición, la derivada direccional de la función $f(x,y)=x^2+3xy^2$ en el punto *P (1,2)* en la dirección que apunta hacia el origen.

**Solución:**

Hallamos el vector unitario de dirección y el punto genérico *X*.

$$\vec{v}=\vec{PO}=(-1,-2)\ \rightarrow\ |\vec{v}|=\sqrt{5}\ \rightarrow\ \vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$X=P+t\vec{u}=\left(1-\frac{t}{\sqrt{5}},2-\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$$

Hallamos los valores correspondientes de la función:

$$f(P)=13$$

$$f(X)=\left(1-\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+3\left(1-\frac{t}{\sqrt{5}}\right)\left(2-\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2$$

Operando y simplificando obtenemos:

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=\lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\vec{u})-f(P)}{t}=\frac{-38}{\sqrt{5}}$$

Volver al comienzo de la Página

---

**17.** Calcula, usando las derivadas parciales, la derivada direccional de la función $f(x,y)=x^2+3xy^2$ en el punto *P(1,2)* en la dirección que apunta hacia el origen.

**Solución:**

Hallamos el vector unitario de dirección.

$$\vec{v}=\vec{PO}=(-1,-2)\ \rightarrow\ |\vec{v}|=\sqrt{5}\ \rightarrow\ \vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Hallamos las derivadas parciales en el punto *P(1, 2).*

$$f_x=2x+3y^2\ \rightarrow\ f_x(1,2)=[2x+3y^2]_{(1,2)}=14$$

$f_y = 6xy \;\rightarrow\; f_y(1,2) = [6xy]_{(1,2)} = 12$

Hallamos el producto escalar:

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = \nabla f \cdot \vec{u} = (14,12)\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-38}{\sqrt{5}}$$

Volver al comienzo de la Página

---

**18.** Calcula, usando las derivadas parciales, la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto *P(1,1)* en el sentido del vector que forma un ángulo de 60º con el sentido positivo del eje OX.

**Solución:**

Hallamos el vector unitario de dirección.

$\vec{u} = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Hallamos las derivadas parciales en el punto *P(1, 1).*

$$f_x = 2x \;\rightarrow\; f_x(1,1) = 2 \;;\; f_y = 2y \;\rightarrow\; f_y(1,1) = 2$$

Hallamos el producto escalar:

$$D_{\vec{u}} f(1,1) = \nabla f \cdot \vec{u} = (2,2)\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Volver al comienzo de la Página

---

**19.** Calcula, aplicando la definición, la derivada direccional de la función $f(x,y) = xyz$ en el punto *P(1,0, -1)* en el sentido del vector $\vec{v} = i + j + k$ .

**Solución:**

Hallamos el vector unitario de dirección y el punto genérico *X*.

$\vec{v} = (1,1,1) \;\rightarrow\; |\vec{v}| = \sqrt{3} \;\rightarrow\; \vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$X = P + t\vec{u} = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}, \frac{t}{\sqrt{3}}, -1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$$

Hallamos los valores correspondientes de la función:

$f(P) = 0$

$f(X) = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\frac{t}{\sqrt{3}}\left(-1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$

Operando y simplificando obtenemos:

$$\bar{D}_{\vec{u}} f(1,2)=\lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\vec{u})-f(P)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(1+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1+\frac{t}{\sqrt{3}}\right)=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Volver al comienzo de la Página

---

**20.** Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

- (a) Estudia la continuidad y diferenciabilidad en el punto *(0,0).*
- (b) Calcula la derivada direccional en *(0,0)* según el vector $\vec{v}=(1,1)$ , el vector $\vec{u}=(1,0)$ y el vector $\vec{w}=(0,1)$ .

**Solución:**

(a) Continuidad en *(0,0)*.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2 y}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\frac{x^2}{x^2+y^2}=0\cdot Ac.=0=f(0,0)$$

luego la función es continua en *(0,0)* por coincidir el valor de la función con el valor del límite.

(b) Diferenciabilidad en *(0,0)*

Hallamos las derivadas parciales en *(0,0),* aplicando la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2 0}{h^2+0}-0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{0\, k}{0+k^2}-0}{k}=0$$

luego, de ser diferenciable, el candidato a diferencial es *df(0,0)=0*

Hallamos el incremento de la función en *(0,0).*

$$\Delta f(0,0)=f(h,k)-f(0,0)=\frac{h^2 k}{h^2+k^2}$$

Calculamos el límite correspondiente:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - d f}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2 k}{h^2+k^2} - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \to$$

hallamos el límite mediante rectas *k=mh*

$$\to = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 mh}{(h^2+m^2h^2)\sqrt{h^2+m^2h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 m}{h^2|h|(1+m^2)\sqrt{1+m^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|} \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)^3}}$$

que no está definido por depender de *m.* Luego la función no es diferenciable en *(0,0).*

(b) Derivadas direccionales:

Al no ser la función diferenciable no es válida la expresión $D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$ y nos vemos obligado a aplicar la definición de derivada direccional:

Vector $\vec{v}=(1,1)$ $mod\,\vec{v}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\to$ $\vec{u}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , luego:

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\vec{u})-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\frac{t^2}{2}\frac{t}{\sqrt{2}}}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}} - 0}{t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vector $\vec{u}=(1,0)$ $\to$ $D_{\vec{u}} f(0,0)=D_x f(0,0)=0$

Vector $\vec{w}=(0.1)$ $\to$ $D_{\vec{w}} f(0,0)=D_y f(0,0)=0$

Volver al comienzo de la Página

---

**3.1.5. Derivada de la función compuesta.** Sea $z=f(x,y)$ donde $x=x(t)$ , $y=y(t)$

Entonces la derivada de la función compuesta $z=f[x(t),y(t)]$ se puede calcular: o bien haciendo la sustitución, o bien, aplicando la siguiente fórmula:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Si $z=f(x,y)$ , donde $y=y(x)$ , entonces la derivada total de *z* respecto de *x* se puede calcular: o bien haciendo la sustitución, o bien, aplicando la siguiente fórmula:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Si $z=f(x,y)$ , donde $x=x(s,t)$ , $y=y(s.t)$ entonces las derivadas parciales se pueden calcular mediante las siguientes fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

Volver al comienzo de la Página

---

**21.** Dada la función $z=x^2y-y^2$ donde $x=sen\,t$ $y=e^t$ Halla $\frac{dz}{dt}$ cuando *t=0*

**Solución:**

Tenemos*:*

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(2xy)\cos t+(x^2-2y)e^t$$

Para *t=0* resulta *x=0* e *y=1* con lo cual

$$\left[\frac{dz}{dt}\right]_{t=0}=-2$$

Volver al comienzo de la Página

---

**3.1.6. Derivada de funciones implícitas.** La derivada de la función implícita $y=y(x)$ definida mediante la ecuación $F(x,y)=0$ puede calcularse: o bien despejando la *y* , o bien, mediante la siguiente fórmula:

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}\text{ , siempre que } F_y\neq 0$$

Las derivadas de orden superior de una función implícita se pueden calcular mediante la derivación sucesiva de la fórmula anterior, considerando *y* como función de *x.*

Las derivadas parciales de una función implícita de dos variables $z=f(x,y)$ definida mediante la ecuación $F(x,y,z)=0$ puede calcularse mediante las fórmulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z}\text{ , siempre que } F_z\neq 0$$

**Teorema de existencia:**

Dada la ecuación $F(x,y)=0$ . Si el punto $(x_0,y_0)$ cumple la ecuación $F(x_0,y_0)=0$ , la función *F* tiene derivadas parciales continuas en un entorno de $(x_0,y_0)$ y $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ entonces la ecuación $F(x,y)=0$ define una función explícita $y=y(x)$ en un entorno de $x_0$ con $y_0=y(x_0)$

Dada la ecuación $F(x,y,z)=0$ Si el punto $(x_0,y_0,z_0)$ cumple la ecuación $F(x_0,y_0,z_0)=0$ , la función *F* tiene derivadas parciales continuas en un entorno de $(x_0,y_0,z_0)$ y $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ entonces la ecuación $F(x,y,z)=0$ define una función explícita $z=f(x,y)$ en un entorno de dicho punto.

Volver al comienzo de la Página

---

**22.** Calcula y', siendo $y^3+y^2-5y-x^2+4=0$

**Solución:**

Tenemos*:* $F(x,y)=y^3+y^2-5y-x^2+4$

hallamos las derivadas parciales:

$$F_x=-2x \ ; \ F_y=3y^2+2y-5$$

Por lo tanto:

$$y'=\frac{-F_x}{F_y}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$

Volver al comienzo de la Página

---

**23.** Calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, siendo $3x^2z-x^2y^2+2z^3+3yz-5=0$

**Solución:**

Tenemos*:* $F(x,y,z)=3x^2z-x^2y^2+2z^3+3yz-5$

hallamos las derivadas parciales:

$$F_x=6xz-2xy^2 \ ; \ F_y=-2x^2y+3z \ ; \ F_z=3x^2+6z^2+3y$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_x}{F_z}=\frac{-6xz+2xy^2}{3x^2+6z^2+3y} \ ; \ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_y}{F_z}=\frac{2x^{2y}-3z}{3x^2+6z^2+3y}$$

Volver al comienzo de la Página

---

**24.** Demuestra que la ecuación $x^2+y^2=2$ define en un entorno del punto *(1, 1)* una función $y=y(x)$
Calcula *y'(1)* e *y''(1)*

**Solución:**

a) Existencia de la función explícita:

Consideramos la función*:* $F(x,y,z)=x^2+y^2-2$ tenemos:

$F(1,1)=0$

*F* es diferenciable con continuidad en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto en un entorno de *(1, 1)*

$$F_y = 2y \;\rightarrow\; F_y(1,1) = 2 \neq 0$$

Luego, de acuerdo con el teorema de existencia de funciones implícitas existe $y = y(x)$ en un entorno de 1 con $y(1) = 1$

b) Cálculo de *y'(1)*

Derivamos la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ teniendo en cuenta que *y* es función de *x* $y = y(x)$

$$2x + 2y\,y' = 0 \;\rightarrow\; y' = \frac{-x}{y} \;\rightarrow \text{ sustituyendo } y'(1) = -1$$

c) Cálculo de *y''(1)*

Derivando la ecuación $2x + 2y\,y' = 0$ se tiene.

$$2 + 2(y')^2 + 2\,y\,y'' = 0 \;\rightarrow\; y'' = \frac{-1-(y')^2}{y} \;\rightarrow\; y''(1) = -2$$

Este caso particular también se podía haber resuelto despejando $y = \pm\sqrt{2-x^2}$ y eligiendo el signo + ya que $y(1) = 1$

Volver al comienzo de la Página

---

**25.** Calcula dz en la ecuación $xyz = x + y + z$

**Solución:**

Consideramos la función: $F(x, y, z) = xyz - x - y - z$

Hallamos las derivadas parciales

$$F_x = yz - 1 \quad F_y = xz - 1 \quad F_z = xy - 1$$

Con lo cual

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-yz}{xy-1} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1-xz}{xy-1}$$

Con lo que resulta:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial}dy = \frac{(1-yz)\,dx + (1-xz)\,dy}{xy-1}$$

Volver al comienzo de la Página

---

## 3.2 Plano tangente y recta normal a una superficie

Se llama *plano tangente* a una superficie en un punto *P* de la misma, al plano que contiene todas las tangentes a las curvas trazadas sobre la superficie por el punto *P*.

Se llama *recta normal* a una superficie a la recta que pasa por un punto *P* y es perpendicular al plano tangente.

Si la superficie está definida de manera implícita por la ecuación *F(x,y,z)=0*, entonces la ecuación del plano tangente en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie viene definido por la ecuación:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P (x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P (y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P (z-z_0)=0$$

y la recta normal por:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P}=\frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P}$$

Si la ecuación de la superficie está definida de manera explícita *z =f(x,y) entonces la ecuación del plano tangente en el punto* $P(x_0, y_0, z_0)$ *viene definida por:*

$$z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P (x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P (y-y_0)$$

y la ecuación de la recta normal:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P}=\frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P}=\frac{z-z_0}{-1}$$

La ecuación del plano tangente se puede utilizar para calcular el valor aproximado de una función. Gráficamente significa medir el valor de la función sobre el plano tangente y no sobre la superficie.

Volver al comienzo de la Página

---

**26.** Halla la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación

$$z=x^2+y^2-2xy+2y-2$$

en el punto *P(1,2,3).*

**Solución:**

Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-2y \;;\; \frac{\partial z}{\partial y}=2y-2x+2$$

En el punto *P(1,2,3)* las derivadas parciales son:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_P=-2 \;;\; \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_P=4$$

Luego la ecuación del plano tangente en el punto *P(1,2,3)* es:

$$z-3=-2(x-1)+4(y-2) \text{ , o bien, simplificando } z=-2x+4y-3$$

y la ecuación de la recta normal es:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{-1}$$

Volver al comienzo de la Página

---

**27.** Halla la ecuación del plano tangente y de la recta normal al hiperboloide de ecuación

$$z^2-2x^2-2y^2-12=0$$

en el punto *P(1,-1,4)*.

**Solución:**

Consideramos la función $F(x, y, z)=z^2-2x^2-2y^2-12$

Hallamos las derivadas parciales:

$$F_x(x,y,z)=-4x \;;\; F_y(x,y,z)=-4y \;;\; F_z(x,y,z)=2z$$

En el punto *P(1,-1,4)* las derivadas parciales son:

$$F_x(1,-1,4)=-4 \;;\; F_y(1,-1,4)=4 \;;\; F_z(1,-1,4)=8$$

Luego la ecuación del plano tangente en el punto *P(1,-1,4)* es:

$$-4(x-1)+4(y+1)+8(z-4)=0 \text{ , o bien, simplificando } x-y-2z+6=0$$

y la ecuación de la recta normal es:

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-4}{8}$$

nota: El vector gradiente $\nabla F=(-4,4,8)$ puede simplificarse por el vector $\vec{v}=(-1,1,2)$

Volver al comienzo de la Página

---

**28.** Halla las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2+2y^2+3z^2=21$ que sean paralelos al plano $x+4y+6z=0$ .

**Solución:**

Consideramos la función $F(x, y, z)=x^2+2y^2+3z^2-21$

Hallamos las derivadas parciales:

$$F_x(x,y,z)=2x \quad ; \quad F_y(x,y,z)=4y \; ; \; F_z(x,y,z)=6z$$

El vector gradiente $\nabla F=(2x,4y,6z)$ es perpendicular a la superficie en el punto de tangencia y, por tanto, será paralelo al vector normal al plano dado $\vec{n}=(1,4,6)$ luego sus componentes serán proporcionales:

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{6}=t \;\rightarrow\; 2x=y=z=t$$

Despejando *x, y*, y *z* en función de *t* y sustituyendo en la ecuación de la superficie resulta $t=\pm 2$ . Luego los puntos de tangencia son *P(1,2,2)* y *Q(-1,-2,-2),* y el gradiente: $\nabla F(1,2,2)=(2,8,12)$ y $\nabla F(-1,-2,-2)=(-2,-8,-12)$

Por consiguiente las ecuaciones de los planos tangentes son:

$2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$ , o bien, simplificando $x+4y+6z=21$ y

$-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$ , o bien, simplificando $x+4y+6z=-21$

Volver al comienzo de la Página

---

**29.** Dada la superficie $z=x\,e^{xy-2}$ se pide:

(a) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P(2,1,2).

(b) Usar el plano tangente para obtener una aproximación del valor de la función en el punto Q*(1' 9, 1' 02).*

**Solución:**

(a) La ecuación del plano tangente viene dada por: $z-z_0=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P(y-y_0)$

Hallamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy-2}+xye^{xy-2} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\,e^{xy-2}$$

En el punto *P(2, 1)* las derivadas parciales son:

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_P=e^0+2\cdot 1\,e^0=1+2=3 \; ; \; \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_P=4\,e^0=4$$

Luego la ecuación del plano tangente es:

$$z-2=3(x-2)+4(y-1) \;\rightarrow\; z=3x+4y-8$$

(b) $z(1'9,1'02)\approx 3\cdot 1'9+4\cdot 1'02-8=1'78$

Volver al comienzo de la Página

---

# 3.3 Extremos de una función de varias variables.

### 3.3.1. Condiciones suficientes para la existencia de extremos locales.

**Definición.** Una función $z=f(x,y)$ tiene un *máximo* (*mínimo*) en un punto $P(x_0,y_0)$ si el valor de la función en este punto es mayor (menor) que su valor en cualquier otro punto *X(x,y)* de algún entono de *P*.

**Condiciones necesarias de extremo.** Si una función diferenciable $z=f(x,y)$ alcanza un extremo en el punto $P(x_0,y_0)$ entonces sus derivadas parciales de primer orden en este punto son iguales a cero, o sea:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

Los puntos en los que las derivadas parciales son iguales a cero se llaman puntos críticos o estacionarios. No todo punto crítico es un punto extremo.

**Condiciones suficientes para la existencia de extremos.**

**(a) Caso de dos variables.** Sea $P(x_0,y_0)$ un punto crítico de una función $z=f(x,y)$ con las derivadas parciales de segundo orden continuas en *P*, y sea $H(x_0,y_0)$ el determinante de su matriz hessiana, entonces:

$$H(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} H(x_0,y_0) & f_{xx}(x_0,y_0) & \mathit{tipo} \\ \mathit{positivo} & \mathit{positivo} & \mathit{Mínimo} \\ \mathit{positivo} & \mathit{negativo} & \mathit{Máximo} \\ \mathit{negativo} & ? & \mathit{Punto\ silla} \\ \mathit{cero} & ? & \mathit{Duda} \end{matrix}$$

Es decir, si el hessiano es positivo hay extremo (el tipo nos lo da $f_{xx}(x_0,y_0)$ , si es negativa máximo y si es positiva mínimo). Si el hessiano es negativo no hay extremo. Y si el hessiano es cero hay duda (que habrá que resolver por otro método)

**(b) Caso de tres o más variables.** Calculamos los siguientes determinantes:

$$\Delta_1=\left[f_{xx}\right]\ ;\ \Delta_2=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}\ ;\ \Delta_3=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}\ ;...;\ \Delta_n$$

i. Si todos los determinantes tienen signo positivo, entonces la función tiene un mínimo en $P(x_0,y_0)$

ii. Si los determinantes tienen signo alterno (comenzando con un valor negativo $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ ), entonces la función tiene un máximo en $P(x_0,y_0)$

iii. En cualquier otro caso hay duda.

Volver al comienzo de la Página

---

**30.** Halla los extremos de la función $f(x, y)=x^2+y^2+xy-3x-6y+1$

**Solución:**

(a) Calculamos las derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y-3\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=x+2y-6$$

Los puntos críticos se obtienen igualando a cero las derivadas parciales.

$$\left.\begin{array}{r}2x+y-3=0\\ x+2y-6=0\end{array}\right\}$$

y resolviendo el sistema obtenemos *x=0*, *y=3. Luego P(0,3) es el único punto crítico de la función.*

Hallamos la matriz hessiana de *f* en *P(0,3).*

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow H(0,3)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Con lo cual tenemos *H(0,3)=+3* luego hay extremo y como $f_{xx}(0,3)=+2$ se trata de un mínimo.

El valor de la función en el mínimo es *f(0,3)=-8.*

Volver al comienzo de la Página

---

**31.** Halla los extremos de la función $f(x, y)=x^2+y^4$

**Solución:**

(a) Calculamos las derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3$$

Los puntos críticos se obtienen igualando a cero las derivadas parciales.

$$\left.\begin{array}{r}2x=0\\ 4y^3=0\end{array}\right\}$$

y resolviendo el sistema obtenemos *x=0*, *y=0. Luego P(0,0) es el único punto crítico de la función.*

Hallamos la matriz hessiana de *f* en *P(0,0).*

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix} \to H(0,0)=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con lo cual tenemos *H(0,0)=0* luego hay duda.

Para determinar la naturaleza del punto crítico hay que acudir a otros criterios, en este caso basta observar la función para ver que se trata de un mínimo ya que

$$f(x,y)=x^2+y^4\geq 0=f(0,0), \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$$

El valor de la función en el mínimo es $f(0,0)=0$.

Volver al comienzo de la Página

---

**32.** Halla los extremos de la función $f(x,y,z)=-x^2-y^2+z^2$

**Solución:**

(a) Calculamos las derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-2x \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}=-2y \; ; \; \frac{\partial f}{\partial z}=2z$$

Los puntos críticos se obtienen igualando a cero las derivadas parciales.

$$\left.\begin{array}{r} -2x=0 \\ -2y=0 \\ 2z=0 \end{array}\right\}$$

y resolviendo el sistema obtenemos *x=0*, *y=0, z=0. Luego P(0,0,0) es el único punto crítico de la función.*

Hallamos la matriz hessiana de *f* en *P(0,0,0).*

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to H(0,0,0)=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Con lo cual tenemos los siguientes determinantes:

$$\Delta_1=-2 \; ; \; \Delta_2=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}=+4 \; ; \; \Delta_3=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=+8$$

Con lo cual ni son todos positivos ni de signos alternos, luego hay duda.

Para determinar la naturaleza del punto crítico hay que acudir a otros criterios, en este caso basta observar la función para ver que se trata de un punto silla $f(x,y)=-x^2-y^2+z^2\geq 0=f(0,0,0)$ para los puntos del tipo (*0,0,z)* y $f(x,y)=-x^2-y^2+z^2\leq 0=f(0,0,0)$ para los puntos del tipo *(x,y,0).*

Observación: Un punto silla no significa que la gráfica tenga necesariamente la forma de una “silla de montar”, sino simplemente que cerca del punto crítico la función toma valores superiores y otros inferiores al valor que toma en dicho punto.

Volver al comienzo de la Página

---

### 3.3.2. Extremos condicionados.

**Planteamiento geométrico.** Supongamos una superficie, definida por la función $z=f(x,y)$, y sobre esta superficie tracemos una curva, definida por la ecuación *g(x,y)=0* . Se trata de encontrar los máximos y mínimos de esta curva espacial.

**Planteamiento analítico.** Se trata de hacer máxima o mínima una función *f(x,y)* sujeta a una restricción *g (x,y)=0*.

**Reducción a una variable:** Teóricamente el problema se puede resolver despejando *y* en la ecuación *g (x,y)=0: y=h(x)* y sustituyendo en *f(x,y) = f(x,h(x)) = k(x)* , con lo cual el problema se reduce a calcular un máximo o un mínimo de una sola variable.

El problema se presenta cuando no es práctico o no es posible despejar una de las variables en la ecuación *g(x,y)=0*.

**Método de los multiplicadores de Lagrange.** Los extremos de la función *f(x,y)* condicionados por la restricción *g(x,y)=0*, se producen en los puntos críticos de la función de Lagrange:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

**Condiciones necesarias de extremo.** Las condiciones necesarias del extremo de una función de Lagrange vienen dadas por el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}\equiv f_x(x,y)+\lambda g_x(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}\equiv f_y(x,y)+\lambda g_y(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\equiv g(x,y)=0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema, eliminamos $\lambda$ de las dos primeras ecuaciones y el resultado lo sustituimos en la tercera (procurando no perder soluciones con las simplificaciones).

**Condiciones suficientes para la existencia de extremos.**

**(a) Caso de dos variables.** Sea $P(x_0,y_0)$ un punto crítico de la función de Lagrange $L(x,y,\lambda)$, obtenido para un valor concreto $\lambda=\lambda_0$ . Formamos la función de Lagrange para ese $\lambda=\lambda_0$

$$L(x,y,\lambda_0)=f(x,y)+\lambda_0 g(x,y)$$

Para estudiar su naturaleza podemos seguir dos caminos:

**(a-1) Método de la diferencial segunda:** El problema de la existencia y el carácter del extremo condicional se resuelve averiguando el signo de la segunda diferencial de la función de Lagrange (particularizada para $\lambda = \lambda_0$ )

$$d^2 L(x_0, y_0; \lambda_0) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$$

a condición de que: $g_x dx + g_y dy = 0$

Si $d^2 L > 0$ la función tiene un mínimo condicionado, y si $d^2 L < 0$ la función tiene un máximo condicionado.

**(a-2) Método del Hessiano:** Hallamos el hessiano de la función de Lagrange $L(x, y, \lambda_0) = f(x, y) + \lambda_0 g(x, y)$ en el punto crítico correspondiente, y sólo podemos concluir en el caso de que sea positivo.

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} L_{xx}(x_0, y_0) & L_{xy}(x_0, y_0) \\ L_{yx}(x_0, y_0) & L_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} L_{xx}(x_0, y_0) > 0 \rightarrow \textit{hay mínimo condicional} \\ L_{xx}(x_0, y_0) < 0 \rightarrow \textit{hay máximo condicional} \end{cases}$$

Es decir, si el hessiano es positivo hay extremo (el tipo nos lo da $f_{xx}(x_{0,} y_0)$ , si es negativa máximo y si es positiva mínimo). En los demás casos hay duda (que habrá que resolver por otro método)

**(b) Caso de tres o más variables (caso general).** Calculamos los siguientes determinantes (con las derivadas evaluadas en $P(x_{0,} y_0)$ ):

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} ; \quad \Delta_4 = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} : \ldots : \Delta_n$$

i. Si todos los determinantes tienen signo negativo, entonces la función tiene un mínimo condicionado en $P(x_{0,} y_0)$

ii. Si los determinantes tienen signo alterno (comenzando con un valor positivo ), entonces la función tiene un máximo condicionado en $P(x_{0,} y_0)$

iii. Si todos los $\Delta_k \neq 0$ pero no se cumplen ninguna de las dos condiciones anteriores, entonces la función no posee extremo condicionado en $P(x_{0,} y_0)$

iv. Si algún $\Delta_k = 0$ hay duda.

**Reducción a dos variables:** Los extremos de la función *f(x,y,z)* , condicionados por la restricción *g (x,y,z) = 0,* pueden reducirse a un extremo de dos variables en aquellos casos en que sea posible despejar una de las variable de la ecuación *g(x,y,z) = 0.*

**Extremos condicionados con varias ligaduras:** Los extremos de la función *f(x,y,z)* , condicionados por las restricciones *g(x,y,z) = 0* y *h(x,y,z) = 0* , se producen en los puntos críticos de la función de Lagrange:

$$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\phi h(x,y,z)$$

Volver al comienzo de la Página

---

**33.** Halla los extremos de la función *f(x,y,z)* , condicionados por la recta *x - y = 0*.

**Solución:**

Formamos la función de Lagrange: $L(x,y;\lambda)=xy+\lambda(x-y)$

Calculamos las derivadas parciales de primer orden de la función *L*.

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+\lambda\ ;\ \frac{\partial L}{\partial y}=x-\lambda\ ;\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x-y$$

Los puntos críticos se obtienen igualando a cero las derivadas parciales.

$$\left.\begin{array}{l} y+\lambda=0 \\ x-\lambda=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\}$$

y resolviendo el sistema obtenemos $x=y=\lambda=0$ *. Luego P(0,0) es el único punto crítico de la función.*

Para estudiar su naturaleza investigamos en el punto *P(0,0)* la segunda diferencial de la función *L(x,y;0)*.

$$d^2L=2\,dx\,dy$$

vinculamos los diferenciales a partir de la ecuación *g(x,y)=0*, lo que nos da *dx-dy = 0*, de donde *dx = dy*, con lo que resulta:

$$d^2L=2(dx)^2\geq 0$$

Es decir, la segunda diferencial, mediante la restricción, se ha convertido en una forma cuadrática definida positiva, y por lo tanto el punto P(0,0) es un mínimo condicionado.

Volver al comienzo de la Página

---

**34.** Halla los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ bajo la restricción *x + y = 1*.

**Solución:**

Formamos la función de Lagrange: $L(x,y;\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$

Para hallar los puntos críticos componemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x \equiv 2x+\lambda=0 \\ L_y \equiv 2y+\lambda=0 \\ L_\lambda \equiv x+y-1=0 \end{array}\right\}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos *x* = *y* , y sustituyendo en la tercera resulta *x* = *y* = ½ , con lo cual, el único punto crítico es *P*( ½, ½) , obtenido para $\lambda=-1$

Para estudiar su naturaleza formamos la función de Lagrange correspondiente:

$$L(x,y;-1)=x^2+y^2-x-y+1$$

hallamos sus derivadas parciales segunda: $L_{xx}=2$ , $L_{yy}=2$ , $L_{xy}=0$ , con lo cual:

$$HL(0,0)=\begin{bmatrix} L_{xx}(0,0) & L_{xy}(0,0) \\ L_{yx}(0,0) & L_{yy}(0,0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=4>0 \text{ y } L_{xx}(0,0)=2>0$$

luego la función presenta un mínimo condicionado en el punto *P*( ½, ½).

Volver al comienzo de la Página

---

**35.** Halla los extremos de la función $f(x,y,z)=xyx$ bajo la restricción $x+y+z = 3$,(siendo *x*, *y*, *z* positivos)

**Solución:**

Formamos la función de Lagrange: $L(x,y;\lambda)=xyz+\lambda(x+y+z-3)$

Para hallar los puntos críticos componemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x \equiv yz+\lambda=0 \\ L_y \equiv xz+\lambda=0 \\ L_z \equiv xy+\lambda=0 \\ L_\lambda \equiv x+y+z-3=0 \end{array}\right\}$$

De las tres primeras ecuaciones obtenemos *x* = *y* = *z*, y sustituyendo en la tercera resulta *x* = *y* = *z* = *1* , con lo cual, el único punto crítico es *P( 1,1,1)* , obtenido para $\lambda=-1$

Para estudiar su naturaleza formamos la sucesión de determinantes:

$$\Delta_3=\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z \\ 1 & z & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta_3 L(1,1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=2>0$$

$$\Delta_4=\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z & y \\ 1 & z & 0 & x \\ 1 & y & x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta_4 l(1,1,1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=-3<0$$

Luego al ser de signos alternos, comenzando por un positivo, se trata de un máximo condicionado, cuyo valor es:

$$f(1,1,1) = 1.$$

Volver al comienzo de la Página

---

### 3.3.3. Extremos absolutos en regiones compactas.

Para hallar los extremos de la función $z=f(x,y)$ sobre un dominio $D$ cerrado es necesario:

1. Determinar los pintos críticos de la función en el interior del dominio.

$$\left.\begin{array}{l} f_x=0 \\ f_y=0 \end{array}\right\} P(x,y)\in D$$

2. Determinamos los puntos críticos de la función condicionados por la línea que constituye la frontera del dominio.

   a) Si la frontera viene definida por una ecuación $g(x,y) = 0$ aplicamos los multiplicadores de Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

   b) Si la frontera viene definida por una poligonal, elegimos las esquinas y los puntos críticos en cada trozo.

3. Sustituimos todos los puntos críticos hallados en la función *f* , y entre todos los valores obtenidos escogemos el máximo y el mínimo.

Volver al comienzo de la Página

---

**36.** Halla los extremos de la función $f(x,y)=x^2+3y^2$ en el círculo $x^2-2x+y^2-3\leq 0$

**Solución:**

Localizamos el círculo expresándolo en forma canónica $(x-1)^2+y^2\leq 4$ , luego se trata del círculo $C$ con centro en el punto $C(1,0)$ y radio $2$.

a) Determinamos los puntos críticos de la función situados dentro del círculo.

$$\left.\begin{array}{l} f_x \equiv 2x=0 \\ f_y \equiv 2y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} P_1(0,0) \in C$$

b) Determinamos los puntos críticos de la función condicionados por el contorno del círculo.

$$L(x, y; \lambda) = x^2 + 3y^2 + \lambda(x^2 - 2x + y^2 - 3)$$

tenemos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} L_x \equiv 2x + 2x\lambda - 2\lambda = 0 \\ L_y \equiv 6y + 2y\lambda = 0 \\ L_\lambda \equiv x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

del que obtenemos cuatro puntos $P_2(-1,0)$ , $P_3(3,0)$ , $P_4(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{15}{4}})$ , $P_5(\frac{3}{2}, -\sqrt{\frac{15}{4}})$

c) comparamos el valor de la función en cada uno de los puntos críticos:

$$f(-1,0)=0 \ , \ f(3,0)=1 \ , \ f(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{15}{4}}) = \frac{54}{4} \ , \ f(\frac{3}{2}, -\sqrt{\frac{15}{4}}) = \frac{54}{4}$$

luego el mínimo absoluto está en el punto $P_1(0,0)$ y el máximo en los puntos $P_4(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{15}{4}})$ y $P_5(\frac{3}{2}, -\sqrt{\frac{15}{4}})$

Volver al comienzo de la Página

---

**37.** Halla los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el recinto limitado por las rectas:

$$y = 1 - x \ ; \ y = 1 + x \ ; \ y = -1 - x \ ; \ y = -1 + x$$

**Solución:**

Localizamos la región. Se trata de un cuadrilátero de vértices $P_1(1,0)$ , $P_2(0,1)$ , $P_3(-1,0)$ , $P_4(0,-1)$

a) Determinamos los puntos críticos de la función situados dentro del cuadrilátero.

$$\left.\begin{array}{l} f_x \equiv 2x=0 \\ f_y \equiv 2y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} P_5(0,0) \in D$$

b) Determinamos los puntos críticos de la función condicionados por el contorno del cuadrilatero, analizando cada lado por separado.

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y)=x^2+y^2 \\ y=1-x \end{array}\right\} f(x)=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1 \;\rightarrow\; f'(x)\equiv 4x-2=0 \;\rightarrow\; P_6(1/2,1/2)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y)=x^2+y^2 \\ y=1+x \end{array}\right\} f(x)=x^2+(1+x)^2=2x^2+2x+1 \;\rightarrow\; f'(x)\equiv 4x+2=0 \;\rightarrow\; P_7(-1/2,1/2)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y)=x^2+y^2 \\ y=-1-x \end{array}\right\} f(x)=x^2+(-1-x)^2=2x^2+2x+1 \;\rightarrow\; f'(x)\equiv 4x+2=0 \;\rightarrow\; P_8(-1/2,-1/2)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y)=x^2+y^2 \\ y=-1+x \end{array}\right\} f(x)=x^2+(-1+x)^2=2x^2-2x+1 \;\rightarrow\; f'(x)\equiv 4x-2=0 \;\rightarrow\; P_9(1/2,-1/2)$$

c) comparamos el valor de la función en cada uno de los puntos críticos y resulta que el mínimo absoluto está en el punto del interior del dominio $P_5(0,0)$ y el máximo en los puntos del contorno $P_1(1,0)$ , $P_2(0,1)$ , $P_3(-1,0)$ y $P_4(0,-1)$

Volver al comienzo de la Página