SISTEMAS LINEALES		PRUEBA 3	21/12/2011
APELLIDOS: SOLUCIÓN	NOMBRE:	DNI:	

Segunda parte (90')

Problema 1 (4 puntos)

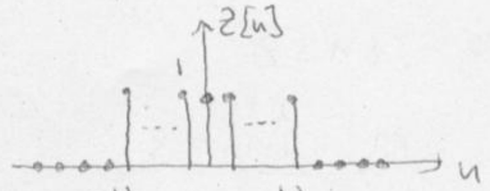
Se desea obtener la señal $x[n]$ cuya DTFT tiene por expresión:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}\cdot\left(\frac{sen(7\omega/2)}{sen(\omega/2)}\right)\cdot\left(\frac{sen(3\omega/2)}{sen(\omega/2)}\right)+4j\pi\delta(\omega)\quad ,-\pi<\omega\leq\pi$$

Para ello se propone seguir los siguientes pasos (enuncie todas las propiedades que utilice y deduzca todos los pares transformados que aplique):

1. Obtenga las señales, $z_1[n]$ y $z_2[n]$, cuyas DTFTs, $Z_1\left(e^{j\omega}\right)$ y $Z_2\left(e^{j\omega}\right)$, se corresponden con cada uno de los dos términos en forma "sen/sen" (lo dos términos entre paréntesis) de la expresión de $X\left(e^{j\omega}\right)$.

PARTIMOS DEL SIGUIENTE PAR TRANSFORMADO:

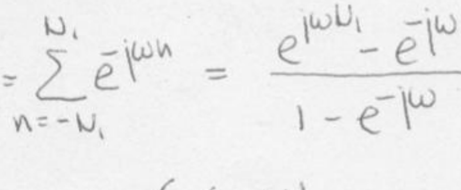


$$\xrightarrow{DTFT} Z(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n]e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega N_1} - e^{-j\omega(N_1+1)}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{-j\omega/2}}\,\frac{e^{j\omega(N_1+\frac{1}{2})} - e^{-j\omega(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}} =$$

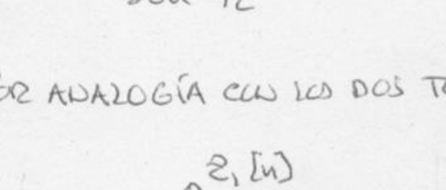
$$= \frac{sen\left(\omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{sen\,\omega/2}$$

POR ANALOGÍA CON LOS DOS TÉRMINOS DEL ENUNCIADO:



$$\xrightarrow{DTFT} Z_1(e^{j\omega}) = \frac{sen\,(7\omega/2)}{sen\,\omega/2}$$

$$z_1[n] = u[n+3]-u[n-4]$$



$$\xrightarrow{DTFT} Z_2(e^{j\omega}) = \frac{sen\,(3\omega/2)}{sen\,\omega/2}$$

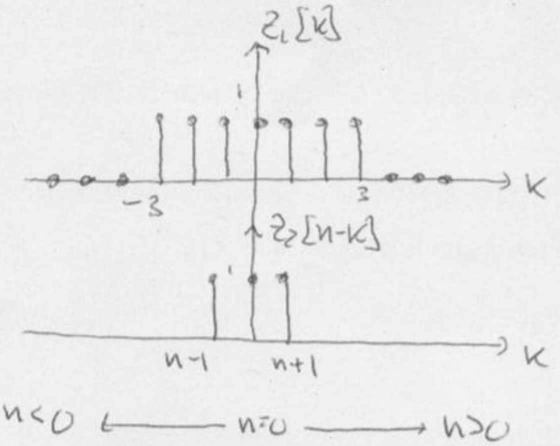
$$z_2[n] = u[n+1]-u[n-2]$$

2. Obtenga la expresión de la señal $y[n]$ cuya DTFT es $Y(e^{j\omega}) = Z_1(e^{j\omega}) \cdot Z_2(e^{j\omega})$. Represente en detalle $y[n]$ en el intervalo $n \in [-6,6]$.

POR LA PROPIEDAD DE CONVOLUCIÓN:

$$Y(e^{j\omega}) = Z_1(e^{j\omega}) \cdot Z_2(e^{j\omega}) \xrightarrow{DTFT^{-1}} y[n] = z_1[n] * z_2[n] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_1[k] \cdot z_2[n-k]$$



- $\left.\begin{array}{l} n > 4 \\ n < -4 \end{array}\right\} \Rightarrow y[n] = 0$

- $-4 \leq n < -2$

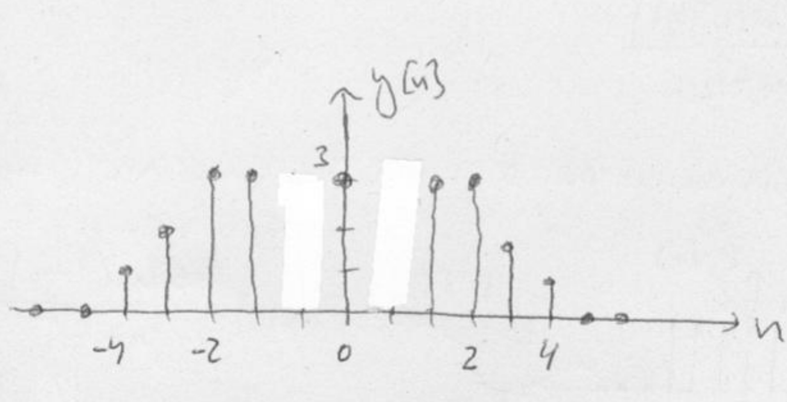
$$y[n] = \sum_{k=-3}^{n+1} 1 = n+5$$

- $-2 \leq n \leq 2$

$$y[n] = \sum_{k=n-1}^{n+1} 1 = 3$$

- $2 < n \leq 4$

$$y[n] = \sum_{k=n-1}^{3} 1 = 5-n$$



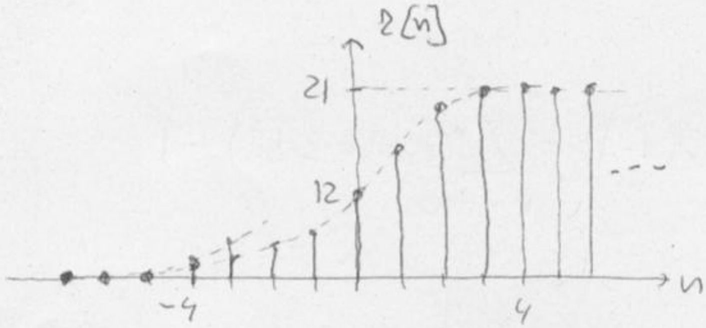
3. Obtenga la DTFT de la señal $r[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} y[k]$, siendo $y[n]$ la señal indicada en el apartado anterior. Represente **esquemáticamente** $r[n]$ en el intervalo $n \in [-10,10]$.

POR LA PROPIEDAD DE LA SUMA ACUMULADA:

$$r[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} y[k] \xrightarrow{\text{DTFT}} R(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \cdot Y(e^{j\omega}) + \pi\delta(\omega)\, Y(e^{j0}), \quad -\pi < \omega \leq \pi \Rightarrow$$

$$Y(e^{j0}) = \sum_{n=-4}^{4} y[n] = 21$$

$$\Rightarrow R(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} 7\omega/2}{\operatorname{sen} \omega/2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} 3\omega/2}{\operatorname{sen} \omega/2}\right) + 21\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$$



4. Obtenga la expresión de la DTFT de la señal $s[n]=k$ (k es una constante) en el intervalo $-\pi < \omega \leq \pi$.

$$s[n]=k \xrightarrow{\text{DTFS}} a_0 = k$$, YA QUE ES UNA SEÑAL QUE SÓLO TIENE COMPONENTE CONTINUA

$$s[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} S(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) =$$

$$= 2\pi k \cdot \delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

5. Obtenga razonadamente, utilizando las conclusiones de los apartados anteriores, la expresión de $x[n]$ en función de $z_1[n]$ y $z_2[n]$, comprobando que su DTFT es la indicada en el enunciado. Represente **esquemáticamente** $x[n]$ en el intervalo $n \in [-10,10]$.

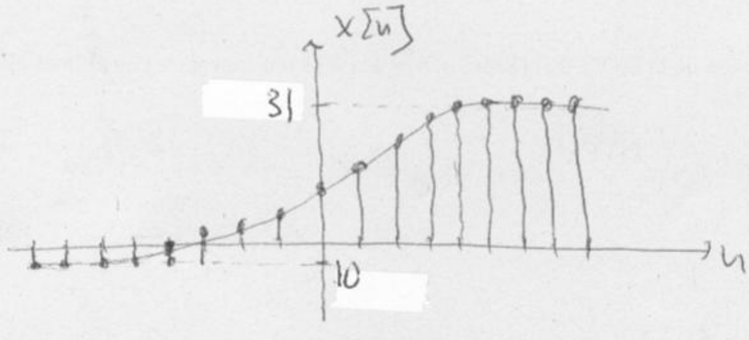
A PARTIR DE LOS RESULTADOS DE LOS APARTADOS 3 y 4, ES POSIBLE CONCLUIR QUE:

$$x[n] = z[n] + 10 \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega}) = Z(e^{j\omega}) + 20\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-j\omega}} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} 7\omega/2}{\operatorname{sen} \omega/2}\right)\left(\frac{\operatorname{sen} 3\omega/2}{\operatorname{sen} \omega/2}\right) + 41\pi\,\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \leq \pi$$

POR LO TANTO:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} y[k] + 10 = \sum_{k=-\infty}^{n} (z_1[n] * z_2[n]) + 10$$



FIN PROBLEMA 1

Problema 2 (4 puntos)

Sea la señal:

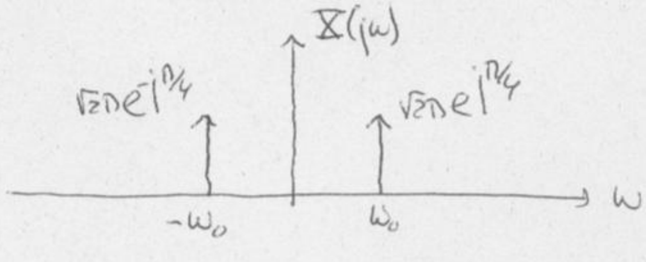
$$x(t) = \sqrt{2}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

1. Si se somete a la señal $x(t)$ a una operación de muestreo cada $T_s = \pi/\omega_0$ y a una posterior reconstrucción mediante un filtro ideal de ganancia T_s y pulsación de corte $\omega_c = 3\omega_0/2$, obtenga la expresión analítica de la señal resultante, $x_r(t)$. Indique además si se ha producido o no *aliasing* en el proceso.

ANALIZANDO EN ω:

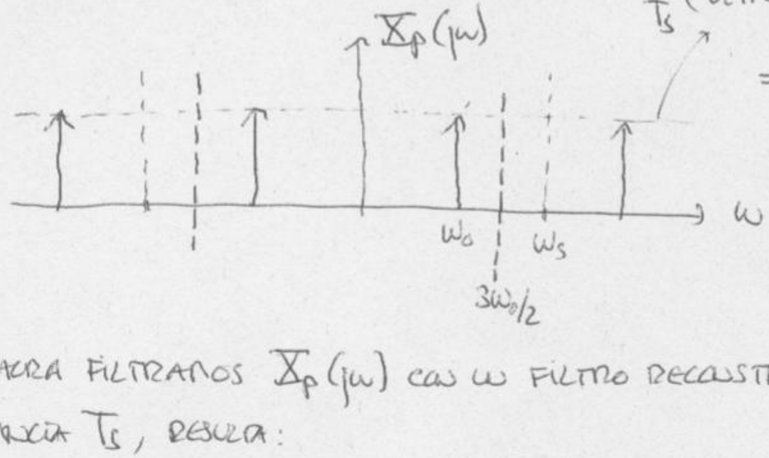
$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \cdot e^{-j\omega_0 t} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} e^{j\omega_0 t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \sqrt{2}\pi \left[e^{-j\pi/4} \delta(\omega+\omega_0) + e^{j\pi/4} \delta(\omega-\omega_0) \right]$$



SI MUESTREAMOS CADA $T_s = \pi/\omega_0 \Rightarrow \omega_s = 2\omega_0$. LA SEÑAL MUESTREADA RESULTA:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) :$$



$$\frac{1}{T_s}\left(\sqrt{2}\pi e^{j\pi/4} + \sqrt{2}\pi e^{-j\pi/4}\right) = \frac{2\pi}{T_s}$$

SE PRODUCE SOLAPE ESPECTRAL

SI AHORA FILTRAMOS $X_p(j\omega)$ CON UN FILTRO RECONSTRUCTOR DE CORTE $3\omega_0/2$ Y GANANCIA T_s, RESULTA:

$$X_2(j\omega) = 2\pi\left\{\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right\} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 2\cos\omega_0 t$$

2. En el proceso de conversión C/D de una **señal genérica**, $x(t)$, con un periodo de muestreo genérico T_s, deduzca analíticamente la relación entre el espectro de la señal muestreada ($X_p(j\omega)$) y el de la señal original ($X(j\omega)$), y la relación entre el espectro de la señal discreta ($X_d(e^{j\Omega})$) y el de la señal muestreada ($X_p(j\omega)$).

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s)$$

$$x(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\cdot \delta(t-kT_s)$$

- $x_p(t) = x(t)\,p(t) \Rightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot X(j\omega) * P(j\omega)$
- $p(t) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T_s} \Rightarrow P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$

Por lo tanto:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

<u>Conversión C/D:</u>

- $\delta(t-kT_s) \xrightarrow{FT} e^{-jk\omega T_s} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_p(t) \xrightarrow{FT} X_p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\,e^{-j\omega k T_s}$

- $x_d[n] \xrightarrow{DTFT} X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]\,e^{-j\Omega n}$

$x_d[n] = x(nT_s)$ $\Rightarrow$

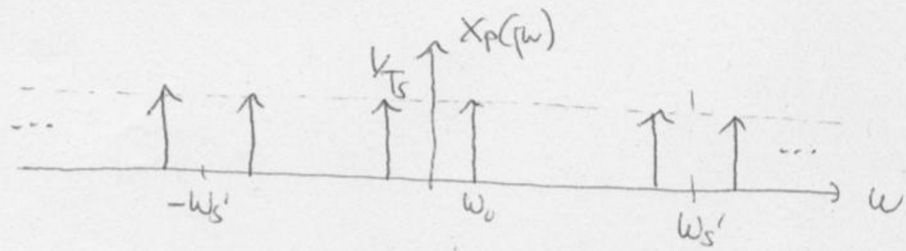
$$\Rightarrow X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(j\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

3. Se somete a la señal $x(t)$ del enunciado a una conversión C/D, muestreando ahora con $T_s = \pi/4\omega_0$, obteniendo así una señal discreta, $x_d[n]$. Calcule el máximo factor por el que se puede diezmar la señal $x_d[n]$ sin que se produzca *aliasing*. A continuación, lleve a cabo dicha operación de diezmado (por el factor obtenido) y represente la DTFT de la señal diezmada resultante, $x_b[n]$.

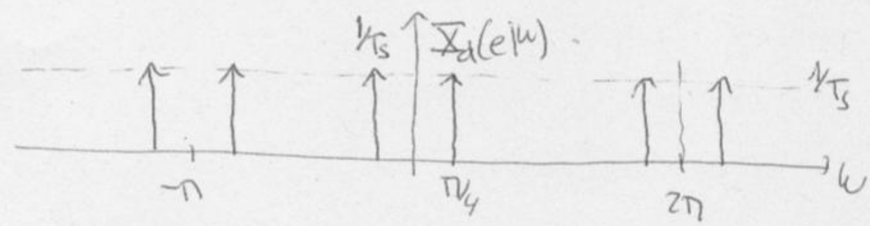
SEGÚN EL APARTADO 1:

$$x(t) \xrightarrow{FT} X(j\omega) = \sqrt{2}\pi \left[e^{-j\pi/4}\delta(\omega+\omega_0) + e^{j\pi/4}\delta(\omega-\omega_0) \right]$$

SI MUESTREAMOS CADA $T_s = \frac{\pi}{4\omega_0} \Rightarrow \omega_s' = 8\omega_0$; LA SEÑAL MUESTREADA SERÁ:



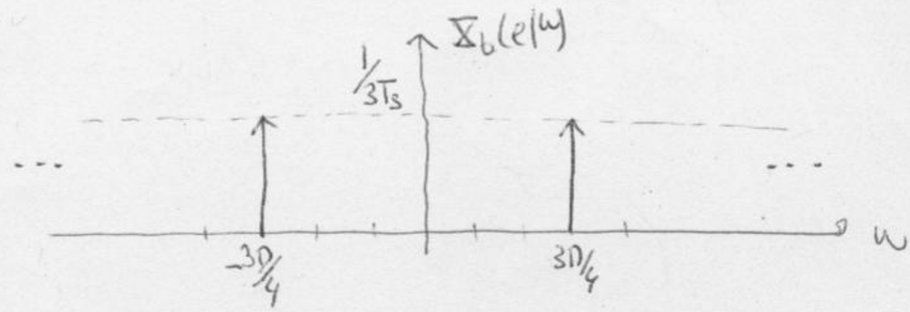
, QUE AL CONVERTIRLA EN UNA SEÑAL DISCRETA, RESULTA:



$x_d[n]$ TIENE $\omega_m = \pi/4 \Rightarrow$ SE PUEDE MUESTREAR SIN ALIASING A

$$\frac{2\pi}{N_s} > 2\cdot\frac{\pi}{4} \Rightarrow N_s < 4 \Rightarrow \underline{N_s = 3}$$ – MÁXIMO FACTOR DE DIEZMADO

AL DIEZMAR $x_d[n]$ OBTENEMOS $x_b[n] = x_d[3n]$ TAL QUE:



FIN EXAMEN