SISTEMAS LINEALES				**PRUEBA 3**	**19/12/2013**
APELLIDOS:	SOLUCIÓN	**NOMBRE:**		**DNI:**	

LEA ATENTAMENTE ESTAS INSTRUCCIONES Y NO DE LA VUELTA A ESTA HOJA HASTA QUE SE LE INDIQUE

PARA LA REALIZACIÓN DE ESTE EXAMEN NO SE PERMITE EL USO DE LIBROS NI APUNTES
NI LA UTILIZACIÓN DE CALCULADORAS

Este examen consta de dos partes:

La primera parte consiste en un *test* de carácter eminentemente teórico. Su objetivo es hacer una evaluación general y homogénea sobre todos los conceptos explicados. Su valor sobre la nota total del examen es de **2 puntos** como máximo. Es imprescindible obtener **al menos 0,7 puntos** en esta parte para que se evalúe el resto del examen.

La segunda parte consta de ejercicios de carácter eminentemente práctico. Su objetivo es evaluar la capacidad del alumno para resolver problemas de análisis con un nivel de dificultad similar al de los problemas propuestos en la asignatura. Su valor sobre la nota total del examen es de **8 puntos**. Es imprescindible obtener **al menos 3 puntos** en esta parte para que se evalúe el resto del examen.

Primera parte (15'):

- La prueba consta de 15 enunciados que deberá designar como **V** o **F** según considere que son verdaderos o falsos. La contestación ha de figurar **con letra clara** en la casilla que se encuentra a la **izquierda** de cada enunciado.
- Cualquier contestación que no sea **V** o **F**, o que no sea perfectamente legible será considerada nula. Si desea rectificar la contestación hágalo de forma clara y limpia.
- Las respuestas contestadas correctamente se evaluarán como **1**, las no contestadas o nulas como **0** y las contestadas incorrectamente como **-0.5** (es decir, puntuarán negativo). No se evaluará ningún tipo de explicación, operación o demostración: únicamente la respuesta **V** o **F**.

V o F

V	La DTFT de una señal periódica $x[n]$ de periodo fundamental N_0 es un tren de N_0 impulsos de amplitud proporcional a los N_0 coeficientes del DTFS de $x[n]$ que se repite periódicamente.
V	Dada una señal $x(t)$ limitada en banda, siempre es posible muestrearla a una frecuencia tal que se evite el fenómeno de *aliasing*.
F	Si $x(t)$ es una señal par, se verifica que la señal $x(t)\cdot\delta(t)$ es una señal nula.
F	Si una señal $x[n]$ no periódica tiene por DTFT la función $X\left(e^{j\omega}\right)$, entonces la DTFT de esta función tendrá un aspecto similar a $x[n]$.
V	Una señal $x[n]$, procedente de una conversión C/D de $x(t)$ mediante muestreo a la tasa de Nyquist, presenta una DTFT con componentes de pulsación máxima.
V	La conexión en cascada de un sistema LTI con su inverso es siempre un sistema sin memoria.
F	Si una señal $x[n]$ de longitud N se escala en ‘n’ reduciendo su longitud a *N/3*, su DTFT se escalará en sentido contrario, ampliando su extensión en ω por 3.
F	El resultado de diezmar por dos la respuesta al impulso de un filtro paso bajo discreto ideal de pulsación de corte $\omega_c < \pi/2$ es la respuesta al impulso de un filtro de banda eliminada ideal.
V	La DTFT de una señal periódica, real e impar tiene parte real nula.
F	Si una señal $x[n]$ está limitada en banda por $\omega_M = 2\pi/3$, entonces la señal $x^2[n]$ estará limitada en banda por $\omega_M = 4\pi/3$.
V	El muestreo de señales de tiempo continuo demuestra que la FT de una señal no periódica en *t* puede ser una función periódica en ω.
V	La convolución de dos señales discretas de tipo *sinc* es en general una señal discreta también de tipo *sinc*.
V	La respuesta de un filtro de $h[n]$ real a una señal real periódica, es en general otra señal periódica.
V	Si una señal real $x[n]$ limitada en banda por $\omega_M < 2\pi/5$ se interpola por dos y luego se diezma por cinco, es posible recuperar la señal inicial $x[n]$.
V	Si una señal $x[n]$ procede de una conversión C/D de otra señal $x(t)$ mediante muestreo sin *aliasing*, a partir de la DTFT de $x[n]$ es posible obtener la FT de $x(t)$.

SISTEMAS LINEALES			**PRUEBA 3**		**19/12/2013**
APELLIDOS:	SOLUCIÓN	**NOMBRE:**		**DNI:**	

Segunda parte (90')

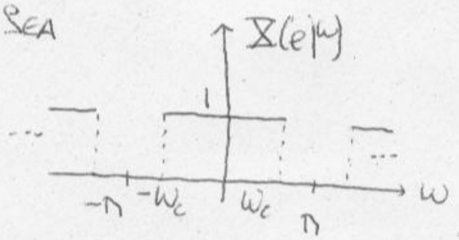
Problema 1 (3 puntos)

Dada la señal: $y[n] = \left(\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}\right)^2$, donde $\frac{\pi}{2} < \omega_c < \pi$

, se pide determinar el valor de ω_c que asegura que $Y(e^{j\pi}) = 1/2$. Para ello, se propone realizar los siguientes ejercicios (enuncie todas las propiedades que utilice y deduzca todos los pares transformados que aplique):

1. Obtenga la DTFT, $X(e^{j\omega})$, de la señal $x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$, donde $0 < \omega_c < \pi$.

SEA



$$\xrightarrow{DTFT^{-1}} x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}}{jn} = \frac{\operatorname{sen}\omega_c n}{\pi n}$$, QUE ES LA EXPRESIÓN DEL

ENUNCIADO $\Rightarrow \underline{X(e^{j\omega}) = u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)}$, | PERIÓDICA 2π

2. Enuncie y demuestre la propiedad de multiplicación de la DTFT, y utilice esta propiedad para obtener la expresión de $Y(e^{j\omega})$ en función de $X(e^{j\omega})$.

PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN:

$$r[n] \xrightarrow{DTFT} R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n]e^{-j\omega n}, \quad r[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} R(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$s[n] \xrightarrow{DTFT} S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]e^{-j\omega n}$$

$$y[n] = r[n]\cdot s[n] \xrightarrow{DTFT} Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r[n]\cdot s[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} R(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right]s[n]e^{-j\omega n} =$$

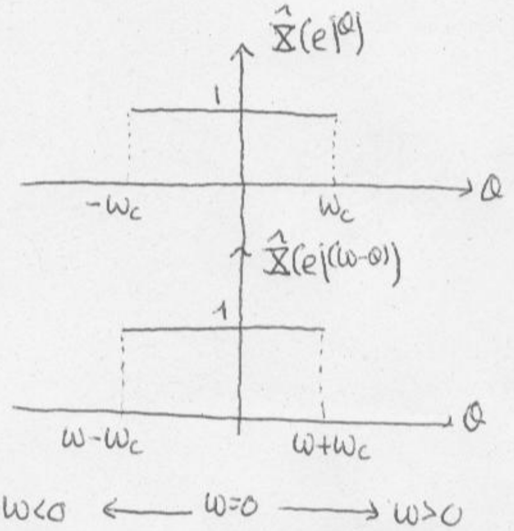
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} R(e^{j\theta})\cdot\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right]\cdot d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} R(e^{j\theta})\cdot S(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = \underline{\frac{1}{2\pi} R(e^{j\omega}) \circledast S(e^{j\omega})}$$

SEGÚN EL ENUNCIADO, $y[n] = x[n] \cdot x[n] \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{CONVOLUCIÓN PERIÓDICA}}}{X(e^{j\omega}) \circledast X(e^{j\omega})} = \frac{1}{2\pi} \cdot X(e^{j\omega}) * \underbrace{\hat{X}(e^{j\omega})}_{\text{UN PERIODO DE } X(e^{j\omega})}$$

3. Obtenga, en función de ω_c, la expresión analítica de la convolución del periodo central de $X\left(e^{j\omega}\right)$ consigo mismo. Represente dicha convolución (denomínela $\hat{Y}\left(e^{j\omega}\right)$) en el intervalo $\omega \in [-2\pi, 2\pi]$.

$$\hat{Y}(e^{j\omega}) = \hat{X}(e^{j\omega}) * \hat{X}(e^{j\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(e^{j\theta}) \cdot \hat{X}(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$



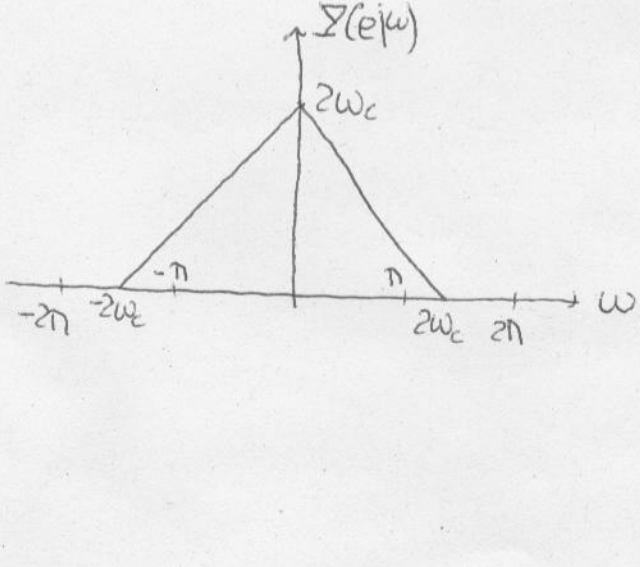
- $\omega + \omega_c < -\omega_c$
  $\omega - \omega_c > \omega_c$ $\Rightarrow |\omega| > 2\omega_c$, $\hat{Y}(e^{j\omega}) = 0$

- $\omega > -2\omega_c$
  $\omega + \omega_c < \omega_c$ $\Rightarrow -2\omega_c < \omega < 0$:

$$\hat{Y}(e^{j\omega}) = \int_{-\omega_c}^{\omega+\omega_c} d\theta = \omega + 2\omega_c$$

- $\omega + \omega_c > \omega_c$
  $\omega - \omega_c < \omega_c$ $\Rightarrow 0 < \omega < 2\omega_c$:

$$\hat{Y}(e^{j\omega}) = \int_{\omega-\omega_c}^{\omega_c} d\theta = -\omega + 2\omega_c$$



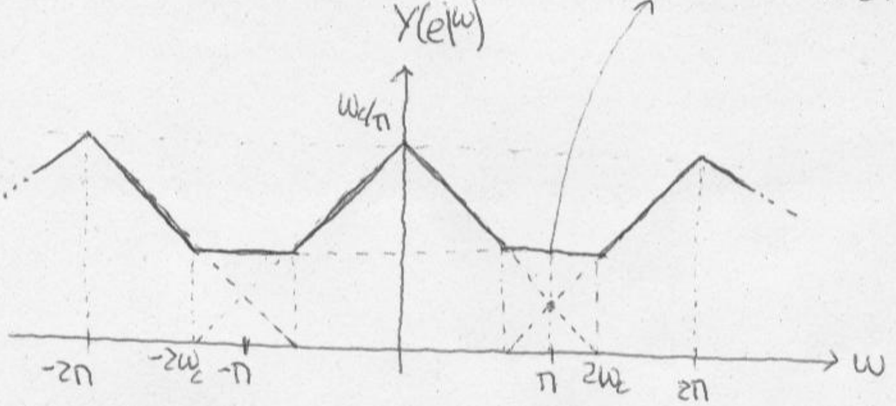
4. Teniendo en cuenta (1) que la convolución es una operación lineal, y (2) que la convolución con una misma señal pero desplazada es el mismo resultado desplazado, utilice el resultado del apartado anterior para obtener una expresión de $Y\left(e^{j\omega}\right)$ en función de $\hat{Y}\left(e^{j\omega}\right)$. A continuación represente esquemáticamente $Y\left(e^{j\omega}\right)$, obtenga su valor en $\omega=\pi$ (en función de ω_c), y deduzca a partir de él cuánto debe valer ω_c para que $Y\left(e^{j\pi}\right)=1/2$.

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\cdot X(e^{j\omega}) * \hat{X}(e^{j\omega}) \overset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{X}(e^{j(\omega-2k\pi)}) * \hat{X}(e^{j\omega}) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{X}(e^{j(\omega-2k\pi)}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{Y}(e^{j(\omega-2k\pi)})}$$

$$Y(e^{j\pi}) = 2\cdot\left(\frac{-\omega+2\omega_c}{2\pi}\right)\Bigg|_{\omega=\pi} = -1+\frac{2\omega_c}{\pi}$$

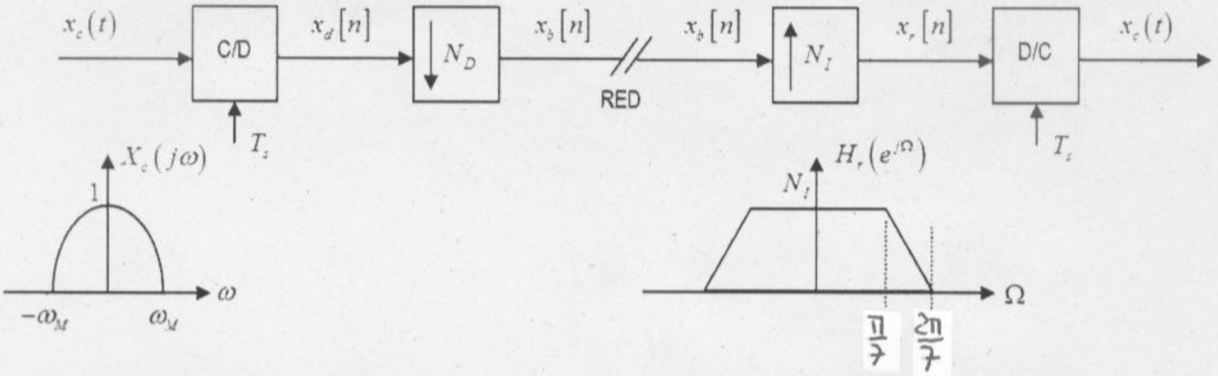


$$Y(e^{j\pi}) = \frac{1}{2} = \frac{2\omega_c-1}{\pi} \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{3\pi}{4}}$$

FIN PROBLEMA 1

Problema 2 (5 puntos)

Se desea transmitir la información analógica de la cinta de un contestador telefónico por una red digital de baja capacidad. Para ello se decide convertir la señal de tiempo continuo en una de tiempo discreto, diezmar en la medida de lo posible la señal discreta para reducir la cantidad de datos a enviar, y tras el envío revertir el proceso, según el esquema de la figura:



1. Dentro del bloque C/D, deduzca detalladamente la relación entre $X_c(j\omega)$ y la FT de la señal muestreada, $X_p(j\omega)$, desarrollando el modelo de muestreo ideal, enunciando las propiedades que utilice y deduciendo en detalle los pares transformados que aparezcan.

C/D ⇒ MUESTREO PERIÓDICO + CONVERSIÓN TREN DE IMPULSOS A SECUENCIA
Ⓐ Ⓑ

Ⓐ : $x_c(t) \longrightarrow \overset{p(t)}{\otimes} \longrightarrow x_p(t)$

· p(t) PERIÓDICA, $p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s) \xrightarrow{FS} a_k=\frac{1}{T_s}\int_{\langle T_s\rangle} p(t)e^{-jk\omega_s t}dt=$

$$=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta(t)e^{-jk\omega_s t}dt=\frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta(t)dt=\frac{1}{T_s},\ \forall k$$

$$p(t)\xrightarrow{FT}P(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_s)=\frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s),\ \omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

· $x_p(t)=x(t)\cdot p(t)\xrightarrow{FT}X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X_c(j\omega)*P(j\omega)=$

PROPIEDAD DE MULTIPLICACIÓN

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(j\theta)X_c(j(\omega-\theta))d\theta=\frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-k\omega_s)\cdot X_c(j(\omega-\theta))d\theta=$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\omega-k\omega_s))\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\theta-k\omega_s)d\theta}_{1}\Rightarrow \underline{X_p(j\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c(j(\omega-k\omega_s))}$$

2. Deduzca detalladamente, haciendo uso de las conclusiones del apartado anterior, la relación entre $X_c(j\omega)$ y $X_d(e^{j\Omega})$. Represente $X_d(e^{j\Omega})$, asumiendo que no se produce solape espectral, indicando sus relaciones con la FT de la señal original, $X_c(j\omega)$.

CONVERSIÓN TREN DE IMPULSOS A SECUENCIA

Ⓑ

$$\cdot\ x_p(t) = x_c(t)\cdot p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT_s)\cdot\delta(t-kT_s) \xrightarrow{FT}$$

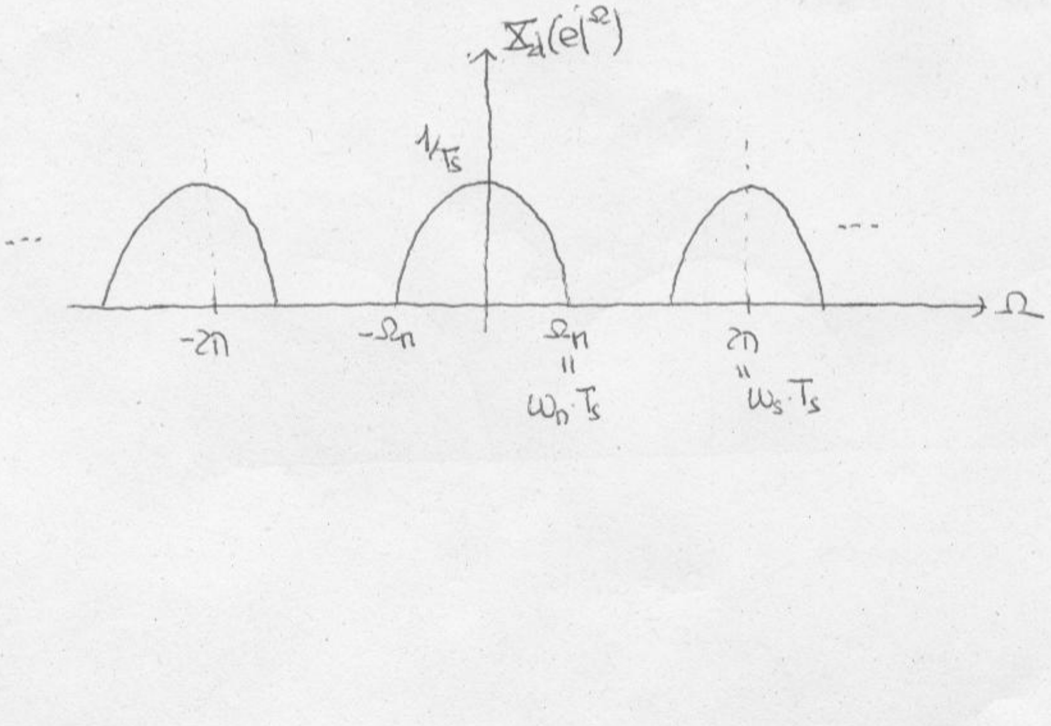
$$\delta(t-kT_s) \xrightarrow{FT} \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega kT_s} \longrightarrow \uparrow\uparrow_{\text{LINEALIDAD}}$$

$$\xrightarrow{FT} X_p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(kT_s)e^{-j\omega kT_s}$$

$$\cdot\ x_d[n] \xrightarrow{DTFT} X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow (x_d[n] = x_c(nT_s))$$

$$\Rightarrow X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T_s) \Rightarrow \boxed{X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\frac{\Omega}{T_s}-k\omega_s))}$$



3. Para digitalizar la cinta se ha utilizado un sistema comercial de Audio CD. Estos sistemas muestrean la señal analógica a $f_s \simeq 45\ kHz$. El ancho de banda o frecuencia máxima de una señal telefónica es de sólo $f_M \simeq 3\ kHz$. Por ello, se propone diezmar la señal discreta previamente a su transmisión. Deduzca cuál es el máximo factor de diezmado, N_D, que puede aplicarse a $x_d[n]$ sin que se produzca *aliasing*. Indique, sin necesidad de detallar el desarrollo completo, la expresión de $X_b(e^{j\Omega})$ en función de $X_d(e^{j\Omega})$, y represente esquemáticamente $X_b(e^{j\Omega})$, calculando e indicando el ancho de banda libre entre la pulsación máxima de la señal, Ω'_M, y π.

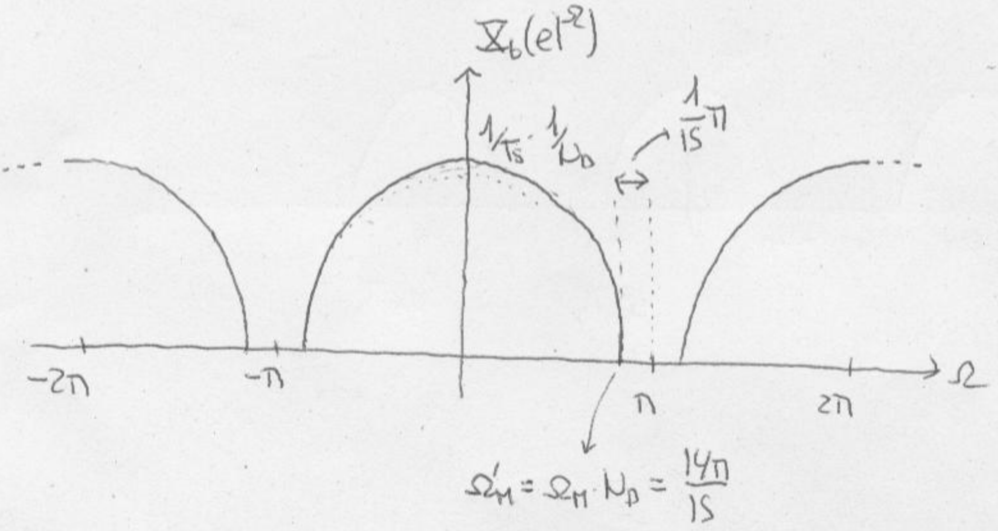
Si $x_c(t)$ / $f_M = 3\text{KHz} \Rightarrow x_d[n]$ / $\Omega_M = \omega_M \cdot T_s = \frac{2\pi}{15}$

MUESTREO DISCRETO:

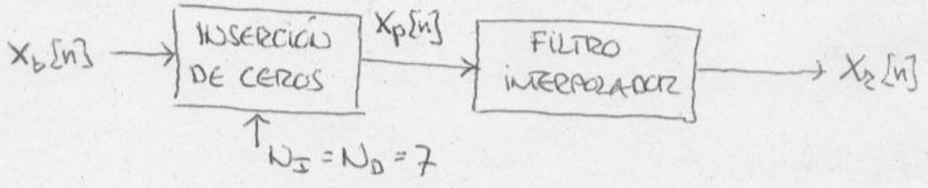
PARA EVITAR ALIASING, $\Omega_D = \frac{2\pi}{N_D} > 2\Omega_M \Rightarrow N_D < \frac{30}{4} \Rightarrow \boxed{N_D = 7}$

DIEZMADO ⇒ MUESTREO DISCRETO Ⓐ + ELIMINACIÓN DE CEROS Ⓑ

$$\left.\begin{array}{l} Ⓐ: X_p(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N_D} \cdot \sum_{k=0}^{N_D-1} X_d\left(e^{j\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N_D}\right)}\right) \\ Ⓑ: X_b(e^{j\Omega}) = X_p(e^{j\Omega/N_D}) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{X_b(e^{j\Omega}) = \frac{1}{N_D} \cdot \sum_{k=0}^{N_D-1} X_d\left(e^{j\left(\frac{\Omega}{N_D} - \frac{2k\pi}{N_D}\right)}\right)}$$



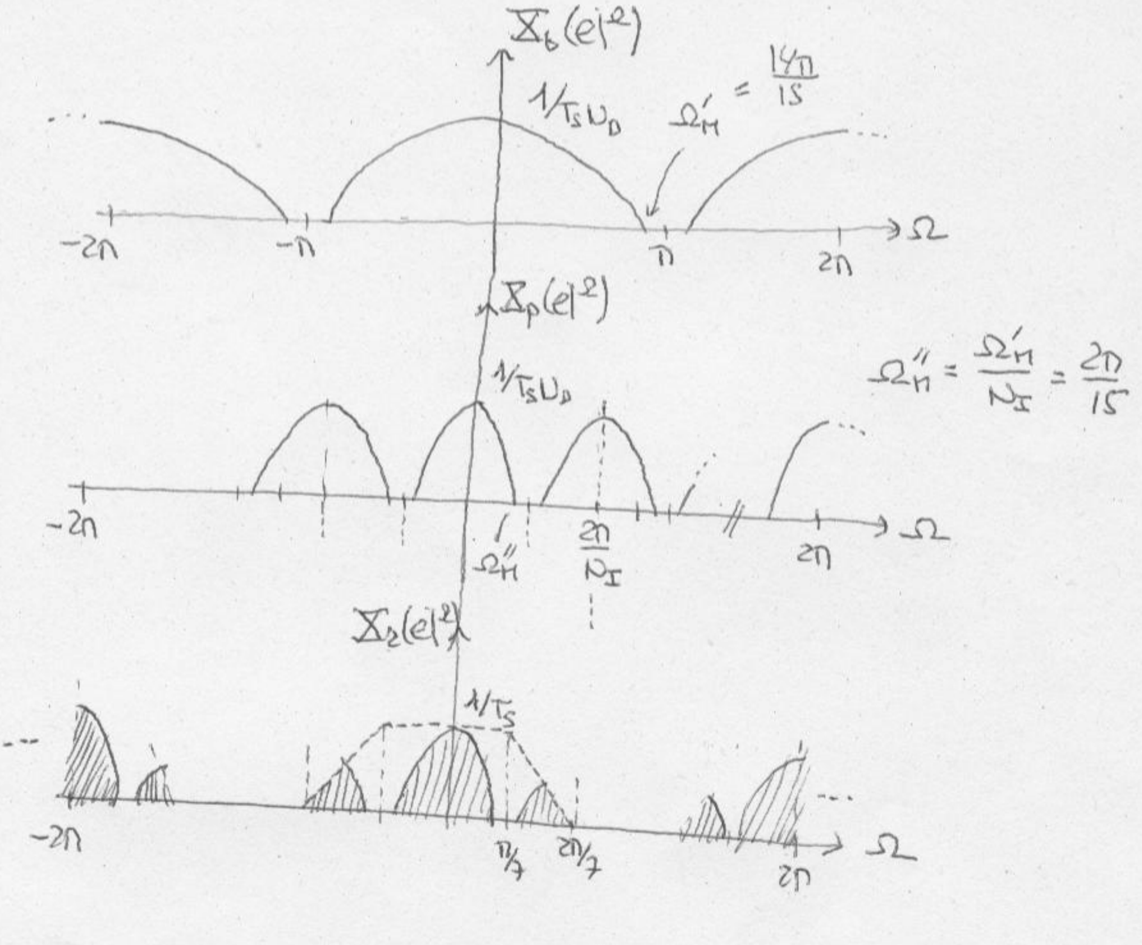
4. En el extremo receptor es necesario interpolar la señal recibida por el mismo factor que previamente se diezmó ($N_I = N_D = N$, obtenido en el apartado anterior), de modo que $x_r[n] = x_d[n]$. Asumiendo que el filtro digital que incluye el interpolador es el filtro no ideal que muestra la figura, $H_r(e^{j\Omega})$, indique, sin demostrarlo en detalle, los procesos y las relaciones, en tiempo y frecuencia, necesarios para obtener $x_r[n]$ a partir de $x_b[n]$, ilustrando en detalle los espectros involucrados. Deduzca si en estas condiciones se verifica o no $x_r[n] = x_d[n]$.



$$\cdot\ x_p[n] = \begin{cases} x_b[n/N_I] & , n \text{ MÚLTIPLO } N_I \\ 0 & , \text{RESTO} \end{cases} \Rightarrow X_p(e^{j\Omega}) = X_b(e^{j\Omega N_I})$$

$$\cdot\ x_r[n] = x_p[n] * h_r[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_r(e^{j\Omega}) = X_p(e^{j\Omega}) \cdot H_r(e^{j\Omega})$$

REPRESENTACIÓN



AL SER LA PULSACIÓN DE CORTE DE $H_r(e^{j\Omega})$, $\omega_c = \frac{2\pi}{7}$, EL FILTRO DEJA PASAR RÉPLICAS DEL ESPECTRO DE $x_c(t)$ $\Rightarrow$ $\underline{x_r[n] \neq x_d[n]}$

5. Siendo el filtro digital que incluye el interpolador un filtro paso bajo no ideal, $H_r\left(e^{j\Omega}\right)$, obtenga el factor de diezmado e interpolación máximo ($N_I = N_D = N$) que posibilita la recuperación sin distorsión de la señal discreta, es decir, que verifica $x_r[n] = x_d[n]$.

SEGÚN EL DIAGRAMA DEL APARTADO ANTERIOR, PARA QUE LA PRIMERA RÉPLICA DEL ESPECTRO DE $X_d(e^{j\omega})$ NO ENTRE EN $H_r(e^{j\Omega})$ DEBE VERIFICARSE:

SIENDO $N_D = N_I = N$, $\frac{2\pi}{N} - \Omega''_M > \frac{2\pi}{7} \Rightarrow$

$$\Omega''_M = \frac{\Omega'_M}{N_I} = \Omega_M \cdot \frac{N_D}{N_I} = \Omega_M = \frac{2\pi}{15}$$

$$\Rightarrow N > \frac{105}{22} \Rightarrow \underline{N = 4}$$

FIN EXAMEN