SISTEMAS LINEALES				PRUEBA 3	18/12/2014
APELLIDOS:	SOLUCIÓN	**NOMBRE:**		**DNI:**	

LEA ATENTAMENTE ESTAS INSTRUCCIONES Y NO DE LA VUELTA A ESTA HOJA HASTA QUE SE LE INDIQUE

PARA LA REALIZACIÓN DE ESTE EXAMEN NO SE PERMITE EL USO DE LIBROS NI APUNTES
NI LA UTILIZACIÓN DE CALCULADORAS

Este examen consta de dos partes:

La primera parte consiste en un *test* de carácter eminentemente teórico. Su objetivo es hacer una evaluación general y homogénea sobre todos los conceptos explicados. Su valor sobre la nota total del examen es de **2 puntos** como máximo. Es imprescindible obtener **al menos 0,7 puntos** en esta parte para que se evalúe el resto del examen.

La segunda parte consta de ejercicios de carácter eminentemente práctico. Su objetivo es evaluar la capacidad del alumno para resolver problemas de análisis con un nivel de dificultad similar al de los problemas propuestos en la asignatura. Su valor sobre la nota total del examen es de **8 puntos**. Es imprescindible obtener **al menos 3 puntos** en esta parte para que se evalúe el resto del examen.

Primera parte (15'):

- La prueba consta de 15 enunciados que deberá designar como **V** o **F** según considere que son verdaderos o falsos. La contestación ha de figurar **con letra clara** en la casilla que se encuentra a la **izquierda** de cada enunciado.
- Cualquier contestación que no sea **V** o **F**, o que no sea perfectamente legible será considerada nula. Si desea rectificar la contestación hágalo de forma clara y limpia.
- Las respuestas contestadas correctamente se evaluarán como **1**, las no contestadas o nulas como **0** y las contestadas incorrectamente como **-0.5** (es decir, puntuarán negativo). No se evaluará ningún tipo de explicación, operación o demostración: únicamente la respuesta **V** o **F**.

V o **F**

V	Dada una señal $x[n]$ de duración finita, el valor de su DTFT en el origen es igual a la suma de todos los valores de $x[n]$.
V	El ancho de banda de una asociación en cascada de filtros paso-bajo ideales es igual al del filtro de la asociación con menor ancho de banda.
F	El diezmado o escalado de una señal discreta es una operación teóricamente irreversible, ya que se eliminan definitivamente valores de la señal.
F	La convolución de dos señales periódicas es siempre igual al resultado de convolucionar un periodo de una con uno de la otra y repetir el resultado periódicamente.
V	La convolución de un tren de impulsos discreto de periodo $N = 4$ con una señal real $x[n]$ no periódica limitada en banda por $\omega_M < \pi/2$, es una señal constante.
V	La DTFT de la señal $x[n] = u[n+2] - u[n-3]$ es una función real.
V	La energía de una señal de tiempo continuo es proporcional a la energía de su FT, y la de una señal de tiempo discreto es igual a la potencia de su DTFT.
V	La operación de interpolación y diezmado permite realizar un muestreo efectivo sin *aliasing* de cualquier señal discreta limitada en banda.
V	La serie de coeficientes del FS o DTFS de un tren de deltas periódico es una serie periódica, tanto si el tren de deltas es de tiempo continuo como de tiempo discreto.
V	Si $h[n]$ es la respuesta al impulso de un filtro paso banda ideal, $e^{j\pi n} \cdot h[n]$ es también la respuesta al impulso de un filtro paso banda ideal.
F	Si $x[n]$ periódica tiene doble periodo que $y[n]$, entonces $X\left(e^{j\omega}\right)$ tiene mitad de periodo que $Y\left(e^{j\omega}\right)$.
F	Si el módulo de los coeficientes del FS de una señal periódica forma una serie par, dicha señal es necesariamente real o imaginaria pura.
F	Si se muestrea la señal $x(t) = \left(sen(100t)/\pi t\right)^2$ a $\omega_s = 320$ no se produce *aliasing*.
F	Si una señal $x(t)$ se submuestrea a ω_s y luego se hace pasar por un filtro paso bajo ideal de pulsación de corte $\omega_c = \omega_s/2$, la señal resultante es idéntica a $x(t)$.
V	Si una señal real $x[n]$ limitada en banda por $\omega_M < \pi/4$ se diezma por cuatro y se interpola por dos, es posible recuperar de algún modo la señal inicial $x[n]$.

SISTEMAS LINEALES			**PRUEBA 3**		**18/12/2014**
APELLIDOS:	Solución	**NOMBRE:**		**DNI:**	

Segunda parte (90')

Problema 1 (4 puntos)

Sea un sistema LTI definido por la relación entrada-salida: $y[n]+\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=3x[n]+2x[n-2]$

1. Enuncie la propiedad de convolución de la DTFT, y enuncie y demuestre la propiedad de desplazamiento en 'n' de la DTFT.

P. CONVOLUCIÓN:

$$y[n] = x[n] * h[n] \xrightarrow{DTFT} Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

P. DESPLAZAMIENTO:

$$x[n] \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x[n-n_0] \xrightarrow{DTFT} e^{-j\omega n_0} \cdot X(e^{j\omega})$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \Rightarrow \underbrace{x[n-n_0]} = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})e^{j\omega(n-n_0)}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int \underbrace{X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}} \cdot e^{j\omega n}d\omega \quad \Big| \text{DTFT}$$

2. Obtenga la DTFT de los dos miembros de la ecuación del enunciado, y aplique la propiedad de linealidad de la DTFT y las dos propiedades del apartado anterior hasta deducir la respuesta en frecuencia del sistema, $H(e^{j\omega})$.

APLICANDO LAS PROPIEDADES DE LINEALIDAD Y DESPLAZAMIENTO:

$$Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{6}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{6}e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega}) = 3X(e^{j\omega}) + 2e^{-2j\omega}\cdot X(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(e^{j\omega})\left\{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-2j\omega}\right\} = X(e^{j\omega})\left\{3+2e^{-2j\omega}\right\}$$

POR SER UN SISTEMA LTI $\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$

POR LO TANTO:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{3+2e^{-2j\omega}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

3. Obtenga, sin aplicar propiedades, la DTFT de las señales: $x_1[n]=\delta[n]+a\delta[n-n_0]$, y $x_2[n]=a^n u[n]$, $(|a|<1)$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-j\omega n} \Rightarrow$$

$$a)\quad X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\delta[n]e^{-j\omega n} + a\delta[n-1]e^{-j\omega n}\right\} \overset{\text{P. SELECCIÓN}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\delta[n] + a\delta[n-1]e^{-j\omega}\right\} =$$

$$= 1 + ae^{-j\omega}$$

$$b)\quad X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(ae^{-j\omega}\right)^n \underset{|a|<1}{=} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

4. Teniendo en cuenta los resultados de los dos apartados anteriores, obtenga la respuesta $y[n]$ del sistema del enunciado a la señal $x[n]=\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$. Represente $y[n]$ en el intervalo $n\in[-2,5]$.

P. CONVOLUCIÓN: $y[n] = x[n]*h[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})$

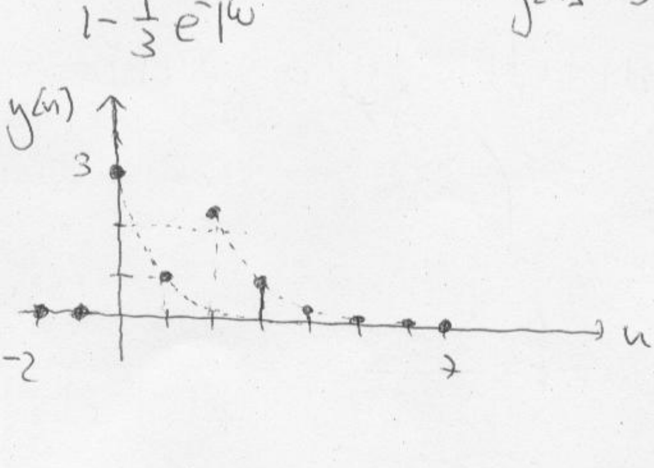
· DEL APARTADO 3 $\rightarrow X(e^{j\omega}) = 1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}$

· DEL APARTADO 2 $\rightarrow H(e^{j\omega}) = \dfrac{3+2e^{-2j\omega}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-2j\omega}} =$

$$= \frac{3+2e^{-2j\omega}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)}$$

POR LO TANTO, $X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega}) = \dfrac{3+2e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} =$

$$= \frac{3}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{2e^{-2j\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \xrightarrow{DTFT^{-1}} y[n] = 3\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-2}u[n-2]$$



FIN PROBLEMA 1

Problema 2 (4 puntos)

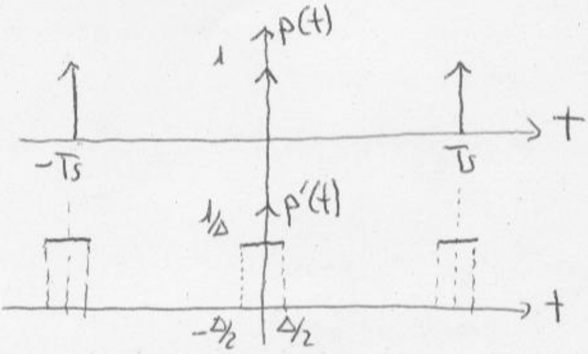
Se desea simular el muestro ideal, con un intervalo T_s, de una señal de tiempo continuo, $x(t)$. Para ello, en vez de muestrear con un tren de deltas periódico, $p(t)$, que en la práctica no es realizable, se desea analizar el efecto de muestrear con un tren periódico, $p'(t)$, de *impulsos* rectangulares de anchura Δ y altura $1/\Delta$ (con $\Delta \ll T_s$) centrados en cada instante de muestreo. Para ello, se propone modelar y realizar un análisis frecuencial según los siguientes apartados:

1. Para modelar la generación de la señal $p'(t)$, se propone hacer pasar un tren de deltas periódico, $p(t)$, de amplitud unidad y periodo T_s, por un filtro de respuesta al impulso $h_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}\left\{u\left(t+\frac{\Delta}{2}\right) - u\left(t-\frac{\Delta}{2}\right)\right\}$. Indique la expresión de $p(t)$, deduzca la de $p'(t)$ (en función de $h_\Delta(t)$), y represente ambas señales (suponga $\Delta \ll T_s$).

$$\boxed{p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT_s)}, \quad p'(t) = p(t) * h_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_s) \cdot h_\Delta(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_s) \cdot h_\Delta(t-kT_s)\, d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\Delta(t-kT_s) \cdot \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kT_s) d\tau}}_{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\Delta(t-kT_s)}$$



2. Obtenga detalladamente las expresiones de *a)* $P(j\omega)$, *b)* $H_\Delta(j\omega)$, en forma *sinc*, y *c)* $P'(j\omega)$. A continuación represente las tres FTs para $\Delta = T_s/4$ e indique qué aspecto tendría $P'(j\omega)$ para $\Delta \ll T_s$.

a) $p(t)$ periódica $T_s \Rightarrow a_k = \frac{1}{T_s} \int_{\langle T_s \rangle} p(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{\langle T_s \rangle} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt =$

$= \frac{1}{T_s}, \ \forall k$

$$P(j\omega) = 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_s) \Rightarrow \boxed{P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)}$$

b) $$H_\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\Delta(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega\Delta} \right|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} =$$

$$= \frac{e^{j\omega\frac{\Delta}{2}} - e^{-j\omega\frac{\Delta}{2}}}{j\omega\Delta} = \frac{2\,\text{sen}(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta} = \boxed{\text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2\pi}\right)}$$

c) $p'(t) = p(t) * h_\Delta(t) \xrightarrow{FT} P'(j\omega) = P(j\omega)\cdot H(j\omega) =$

$$= \frac{2\pi}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2\pi}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\cdot \text{sinc}\left(k\frac{\Delta}{T_s}\right)}$$

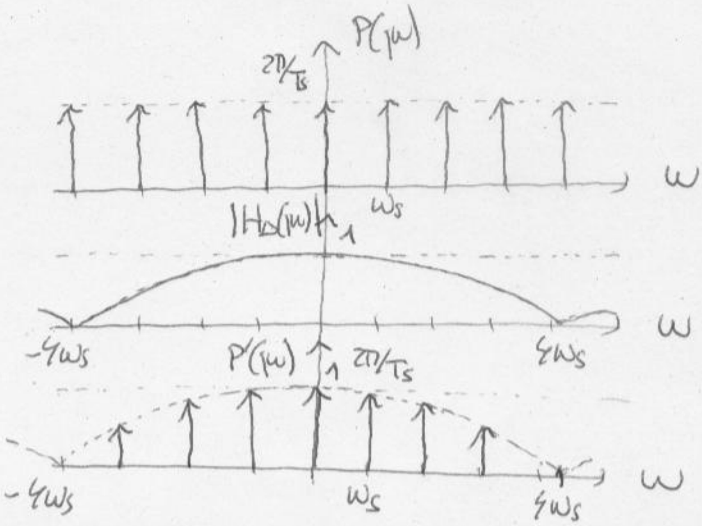
REPRESENTACIÓN:

- $P(j\omega) \rightarrow$ DELTAS EN $k\omega_s$
- $H_\Delta(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{4\cdot 2\pi}\right) =$

$= \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4\omega_s}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CEROS EN $4k\omega_s$

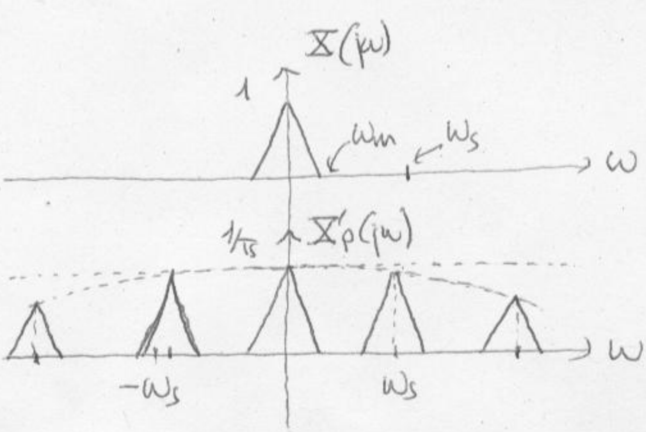
$\underline{\Delta \ll T_s \Rightarrow P'(j\omega) \simeq P(j\omega)}$



3. Deduzca detalladamente la expresión de $x'_p(t) = x(t)\cdot p'(t)$ en función de $x(t)$, y la de su FT, $X'_p(j\omega)$ en función de $X(j\omega)$. A continuación, represente $X'_p(j\omega)$ (para dibujarla suponga $x(t)$ real y limitada en banda por $\omega_m < \omega_s/2$). Indique, según sea el valor de Δ, si es o no posible recuperar $x(t)$ a partir de $x'_p(t)$, y, de serlo, de qué modo.

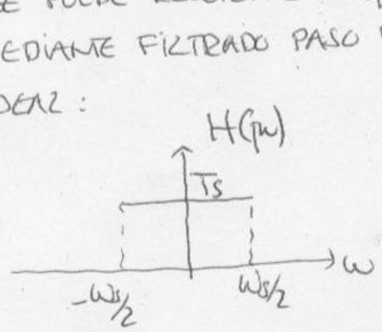
- $x'_p(t) = x(t)\cdot p'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\cdot h_\Delta(t-kT_s)$
- $X'_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot X(j\omega) * P'(j\omega) = \frac{1}{T_s}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\theta-k\omega_s)\cdot\text{sinc}\left(k\frac{\Delta}{T_s}\right)\cdot X(j(\omega-\theta))\,d\theta =$

$$= \boxed{\frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{sinc}\left(k\frac{\Delta}{T_s}\right)\cdot X(j(\omega-k\omega_s))}$$



PARA $\Delta \ll T_s$, $X'_p(j\omega)$ INCLUYE UNA VERSIÓN DE $X(j\omega)$ NO SOLAPADA ($\omega_m < \omega_s/2$) $\Rightarrow$

SE PUEDE RECUPERAR $X(j\omega)$ MEDIANTE FILTRADO PASO BAJO IDEAL:



FIN EXAMEN