

Nombre y apellidos:

Número de matrícula:

- sólo puntuarán las respuestas con un razonamiento matemático, gráfico, etc.
- sólo se calificarán los problemas en los que se haya marcado una respuesta. Si la opción elegida es "ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es:", la respuesta debe aparecer sobre la línea de puntos inmediatamente a continuación.
- las respuestas incorrectas no restan puntos
- usar por favor bolígrafo, pluma o rotulador, nunca lápiz
- usar estas mismas hojas para hacer los cálculos, no usar ningún otro papel
- 80 min, 0.5 puntos cada problema

Las soluciones aparecerán en AulaWeb dentro de dos días.

Las preactas se publicarán no más tarde del día 11 de junio y la revisión de examen será el 13 de junio a las 13:00 en la sala R3.



1. Un copolímero de propileno y 1-hexeno tiene una arquitectura molecular con  $n = 10$  ramas de cuatro carbonos ( $-C_4H_9$ ) cada una, por cada 100 átomos de carbono de la cadena principal. Determinar qué masas (kg) de propileno y de 1-hexeno son necesarias para obtener 1 tonelada de copolímero (los dos monómeros se consumen totalmente en la copolimerización).

- 538.5 kg de propileno y 461.5 kg de 1-hexeno
- 666.7 kg de propileno y 333.3 kg de 1-hexeno
- 428.6 kg de propileno y 571.4 kg de 1-hexeno
- 369.9 kg de propileno y 630.1 kg de 1-hexeno
- 470.6 kg de propileno y 529.4 kg de 1-hexeno
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: .....



**Sol.: según el enunciado el copolímero tiene, por cada 100 átomos de carbono de la cadena principal,  $n = 10$  ramas  $C_4H_9$ , es decir,  $n = 10$  residuos de 1-hexeno que proporcionan**

**$2 \cdot n = 20$  carbonos. Los  $(100 - 2n) = 80$  carbonos restantes los proporcionarán**

**$\frac{(100 - 2n)}{2} = 40$  residuos de propileno.**

**En 1kmol de UER del copolímero (que contiene 100 átomos de carbono) habrá 40 kmol del residuo monomérico del propileno y 10 kmol del residuo monomérico del 1-hexeno. Las masas**

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

Cartagena99

$$X_P = \frac{\frac{100 - 2n}{2} \cdot M_{WP}}{\frac{100 - 2n}{2} \cdot M_{WP} + n \cdot M_{WH}} \quad X_P = 0.667$$

$$X_H = 1 - X_P \quad X_H = 0.333$$

Con lo cual para producir una tonelada de copolímero se necesitan:

$$1000 \cdot X_P = 666.7$$

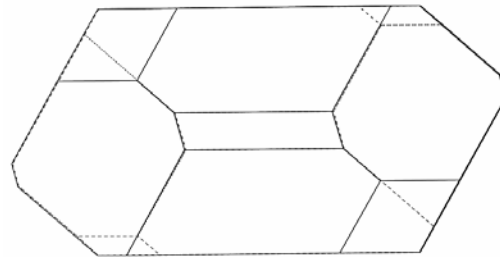
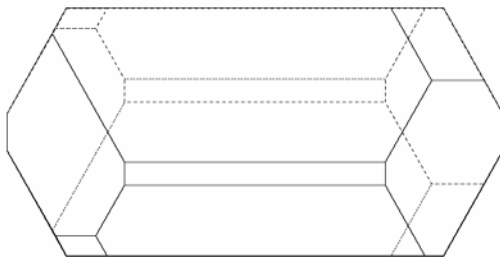
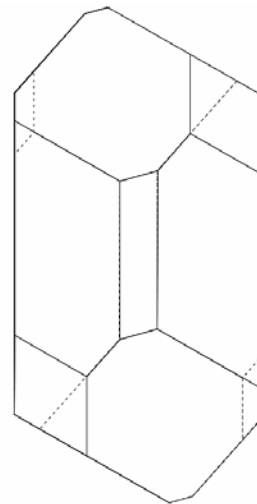
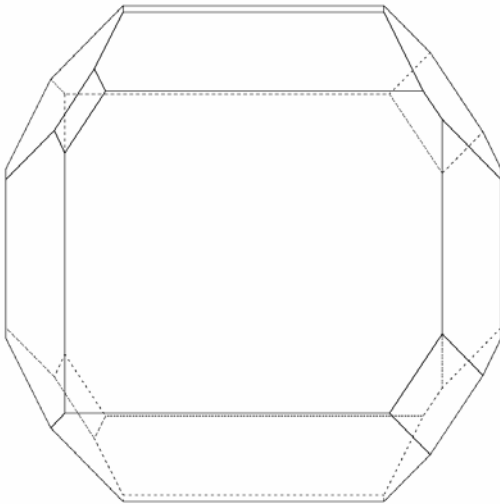
**kg de propileno y**

$$1000 \cdot X_H = 333.3$$

**kg de 1-hexeno**



2. La figura muestra un monocristal eumórfico de un mineral. ¿A qué clase cristalográfica pertenece el mineral?



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

- $2m$
- $m$
- $222$
- $4$
- $4mm$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es: .....

Sol.: sólo hay un eje de rotación binario perpendicular al papel en las dos figuras de la derecha.  
La clase es: **2**

3. De un material de la clase 3 se conocen las siguientes complianzas elásticas (todas en  $\text{Pa}^{-1}$ ):

$$s_{1111} = 2.2 \times 10^{-8} \quad s_{3333} = 8.9 \times 10^{-9} \quad s_{1122} = -2.3 \times 10^{-9} \quad s_{1133} = -4.4 \times 10^{-9}$$
$$s_{2223} = 4.1 \times 10^{-8} \quad s_{2213} = 5.7 \times 10^{-8} \quad s_{2323} = 3.1 \times 10^{-9}$$

Determinar la complianza  $s_{1213}$  en las mismas unidades.

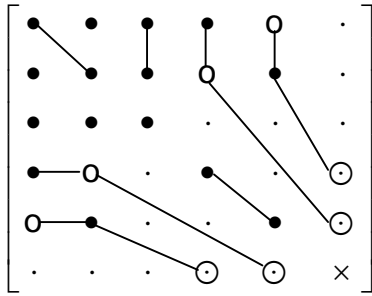
- $8.2 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
- $5.7 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
- $-8.1 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
- $2.05 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
- $-4.1 \cdot 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es: .....



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



**En notación de Voigt:**

$$s_{14} = s_{41}$$

$$s_{24} = s_{42} = -s_{14}$$

$$s_{56} = s_{65} = 2s_{14}$$

**y en notación tensorial:**

$$2s_{1123} = 2s_{1132} = 2s_{2311} = 2s_{3211} = s_{14}$$

$$2s_{2223} = 2s_{2322} = -2s_{1123} \Rightarrow s_{2223} = -s_{1123}$$

$$4s_{1312} = 4s_{1213} = 4s_{1123} \Rightarrow s_{1312} = s_{1213} = s_{1123} = -s_{2223}$$

**la complianza pedida es:**

$$s_{1213} = -s_{2223}$$

$$s_{1213} = -4.1 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$$



4. Determinar los índices de Miller de un plano que contiene los siguientes puntos de una celda de un cristal tetragonal (red tetragonal P y base un átomo esférico):

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), (0,1,1) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Sugerencia: colocar los puntos de coordenadas dadas en una celda tetragonal P y cambiar la posición del origen de coordenadas, si se desea (siempre en una posición atómica de un cristal tetragonal), para colocarlo más próximo al plano cuyos índices hay que calcular.

- (3 3 2)
- (2 2 3)
- (1 1 2)
- (2 1 1)
- (2 2 1)
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: .....



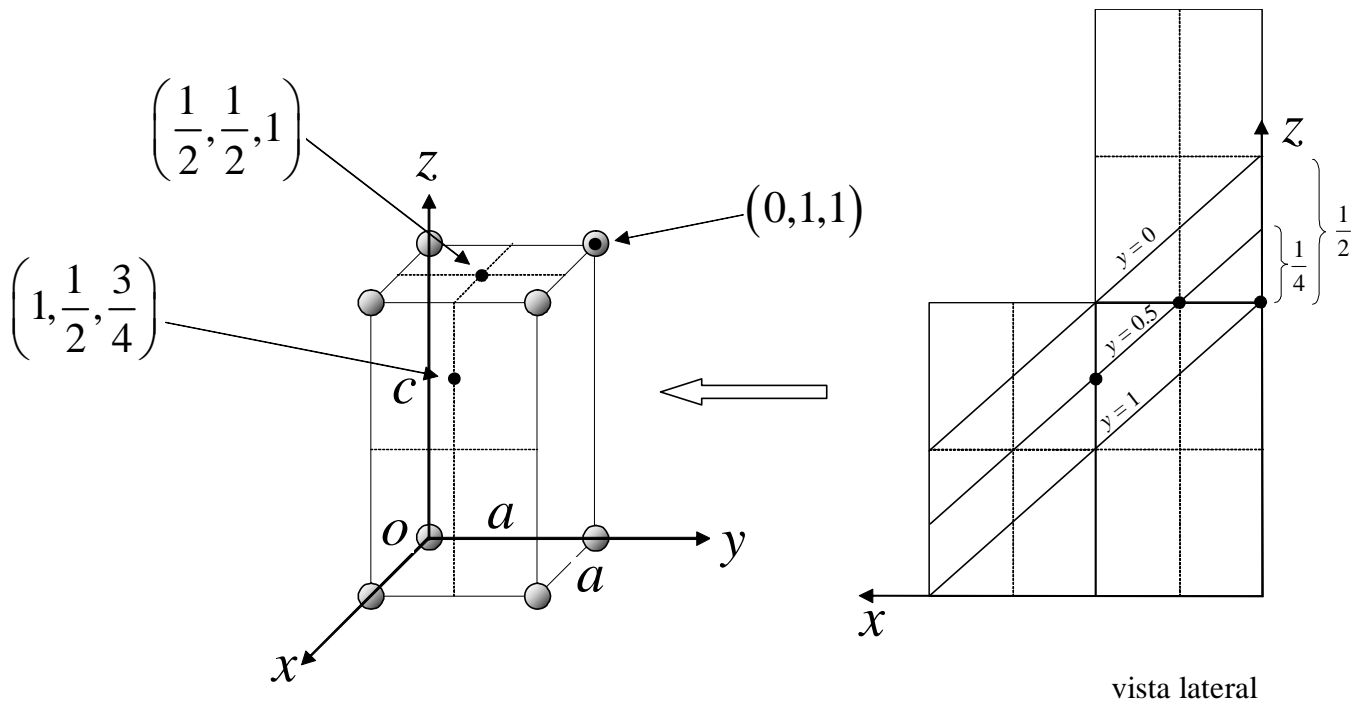
**Sol.: se dibuja una celda tetragonal (red primitiva P con un átomo esférico en cada punto de red), se coloca un origen o, los ejes, y a continuación se sitúan los puntos cuyas coordenadas se dan en**

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE**  
**LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

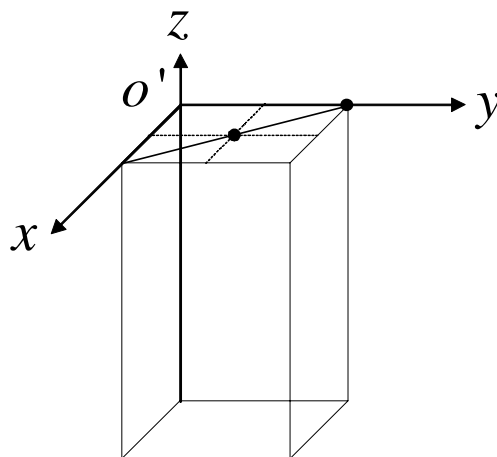
---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS**  
**CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





Es conveniente cambiar la posición del origen a una posición atómica más cercana: por ejemplo el punto  $o'$  de la siguiente figura:



| $x$ | $y$ | $z$           |   |
|-----|-----|---------------|---|
| 1   | 1   | $\frac{1}{2}$ | <div style="display: inline-block; vertical-align: middle;"> <span style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">}</span> intersecciones                             </div> |
| 1   | 1   | 2             |   |

El plano buscado es: **(112)**

▢ \_\_\_\_\_

diag. triang. \_\_\_\_\_



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

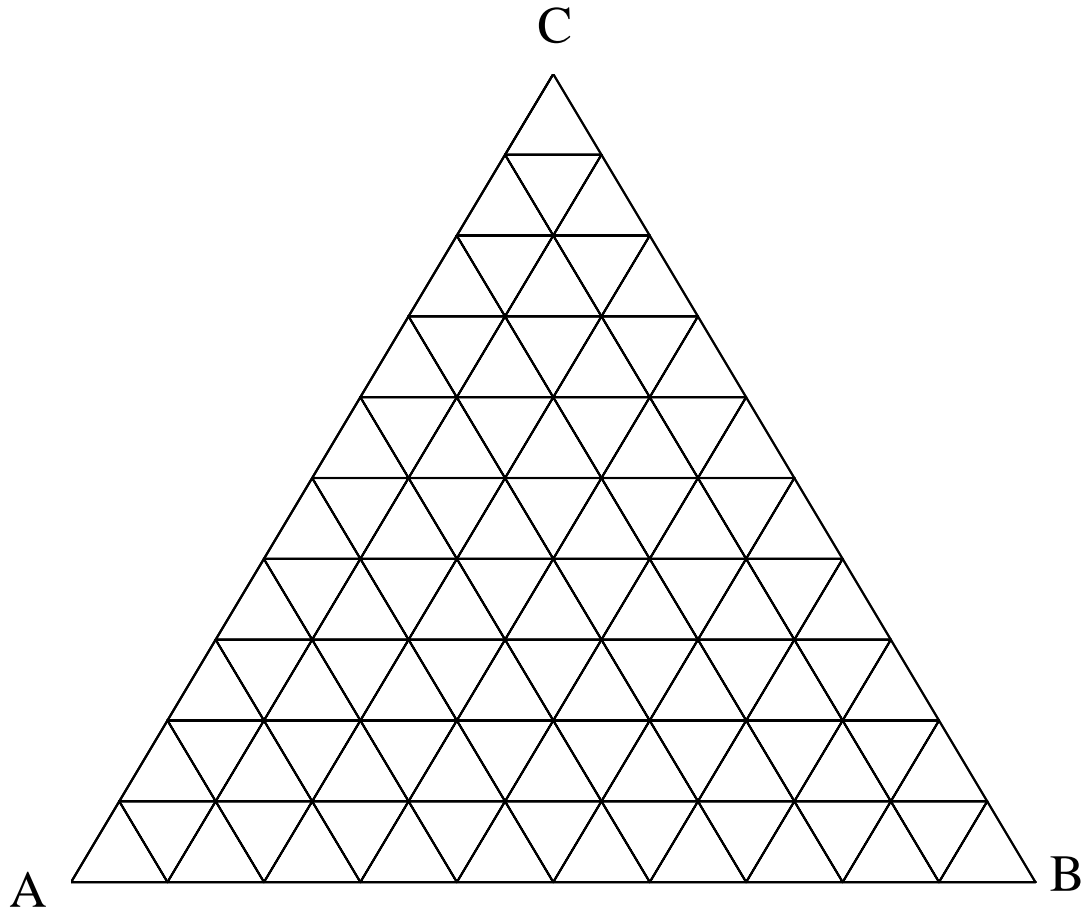
---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Este cemento se aplica con agua y, tras las reacciones de fraguado, se obtiene una mezcla de dos sales: sal de tobermorita  $3 \text{CaO} \cdot 2 \text{SiO}_2 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$  (T) y aluminato cálcico octohidrato  $\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 8 \text{H}_2\text{O}$  (L).

Determinar la composición másica del cemento aluminoso en %CaO (A), % $\text{Al}_2\text{O}_3$  (B) y % $\text{SiO}_2$  (C).

Masas atómicas: C: 12, O: 16, H:1, Ca: 40, Al: 27, Si: 28 kg/kmol.



- 40.4 % A, 50.7 % B, 8.9 % C
- 43.2 % A, 42.6 % B, 14.6 % C
- 45.9 % A, 35.2 % B, 19 % C
- 48.2 % A, 28.5 % B, 23.3 % C
- 50.4 % A, 22.3 % B, 27.3 % C
- ninguna de las anteriores, la respuesta correcta es: .....

Cartagena99

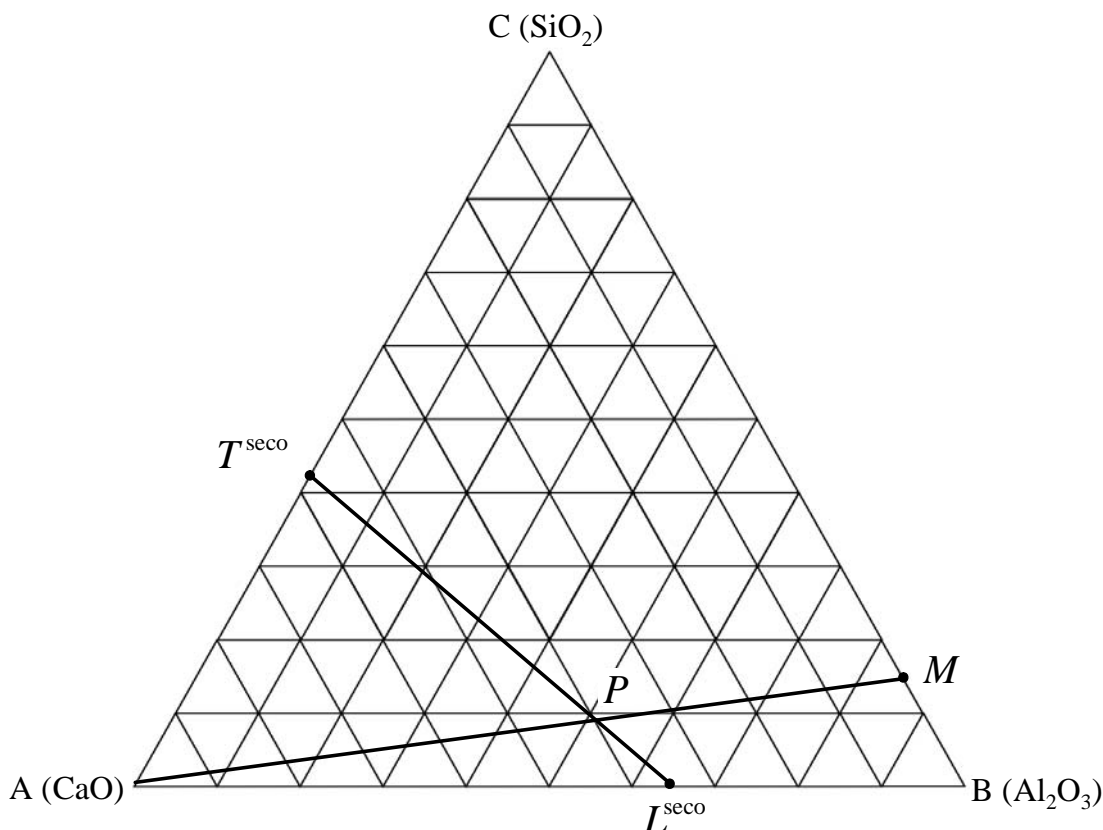
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

$$X_{T^{seco}C} = \frac{2M_{wC}}{2M_{wC} + 3 \cdot M_{wA}} \quad X_{T^{seco}C} = 0.417 \quad X_{L^{seco}B} = \frac{M_{wB}}{M_{wB} + M_{wA}} \quad X_{L^{seco}B} = 0.646$$

Se sitúan en el diagrama las composiciones de M (dato), T<sup>seco</sup> y L<sup>seco</sup>. Las líneas A-M y T<sup>seco</sup>-L<sup>seco</sup> tienen un punto de intersección que es la composición de P buscada, es decir:



y leyendo la composición resulta aprox.:

$X_A = 40 \%$

$X_B = 51 \%$

$X_C = 9 \%$

Analíticamente se plantean las siguientes ecuaciones, trabajando en base seca:

$$X_A + X_B + X_C = 1$$

$$X_{T^{seco}} + X_{L^{seco}} = 1$$

De la alimentación al horno, sólo el mineral M proporciona alúmina (B) y sílice (C):

$$X_A + X_M = 1$$

$$X_B = (1 - X_{M_C}) \cdot X_M$$

$$X_C = X_{M_C} \cdot X_M$$

Tras el freo queda toda la alúmina (B) que hay en P y en L<sup>seco</sup> y toda la sílice (C) que hay en T<sup>seco</sup>.

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**



$$X_{L\text{seco}} = \frac{X_{T\text{seco}C}}{X_{T\text{seco}C} + X_{L\text{seco}B} \cdot \frac{X_{M_C}}{1 - X_{M_C}}} \quad X_{L\text{seco}} = 0.785$$

$$X_{T\text{seco}} = 1 - X_{L\text{seco}}$$

resulta, en fracciones másicas, una composición de P:

$$X_{T\text{seco}} = 0.215$$

$$X_B = X_{L\text{seco}B} \cdot X_{L\text{seco}} \quad X_B = 0.507$$

$$X_C = X_{T\text{seco}C} \cdot X_{T\text{seco}} \quad X_C = 0.089$$

$$X_A = 1 - X_B - X_C \quad X_A = 0.404$$



6. Un semiconductor del grupo IV A se dopa con bismuto, elemento del grupo V A, con una concentración de  $N_V = 1.3 \times 10^{22}$  átomos de bismuto/ $m^3$ , y con indio, del grupo III A, con una concentración de  $N_{III} = 2.87 \times 10^{23}$  átomos de indio/ $m^3$ . A 300K la concentración de portadores del semiconductor intrínseco es  $n_i = 2 \cdot 10^{16}$  port./ $m^3$  y las movilidades de portadores se determinan usando las curvas de la figura.

Determinar la resistividad eléctrica ( $\Omega m$ ) del semiconductor dopado a 300 K, suponiendo ionización total de los dopantes. Indicar claramente cómo se hallan las movilidades; no es válido hacer la lectura a ojo.

- $4.01 \cdot 10^3 \Omega m$
- $2.51 \cdot 10^{-4} \Omega m$
- $6.08 \cdot 10^{-4} \Omega m$
- $1.64 \cdot 10^3 \Omega m$
- $2.38 \cdot 10^{-4} \Omega m$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:



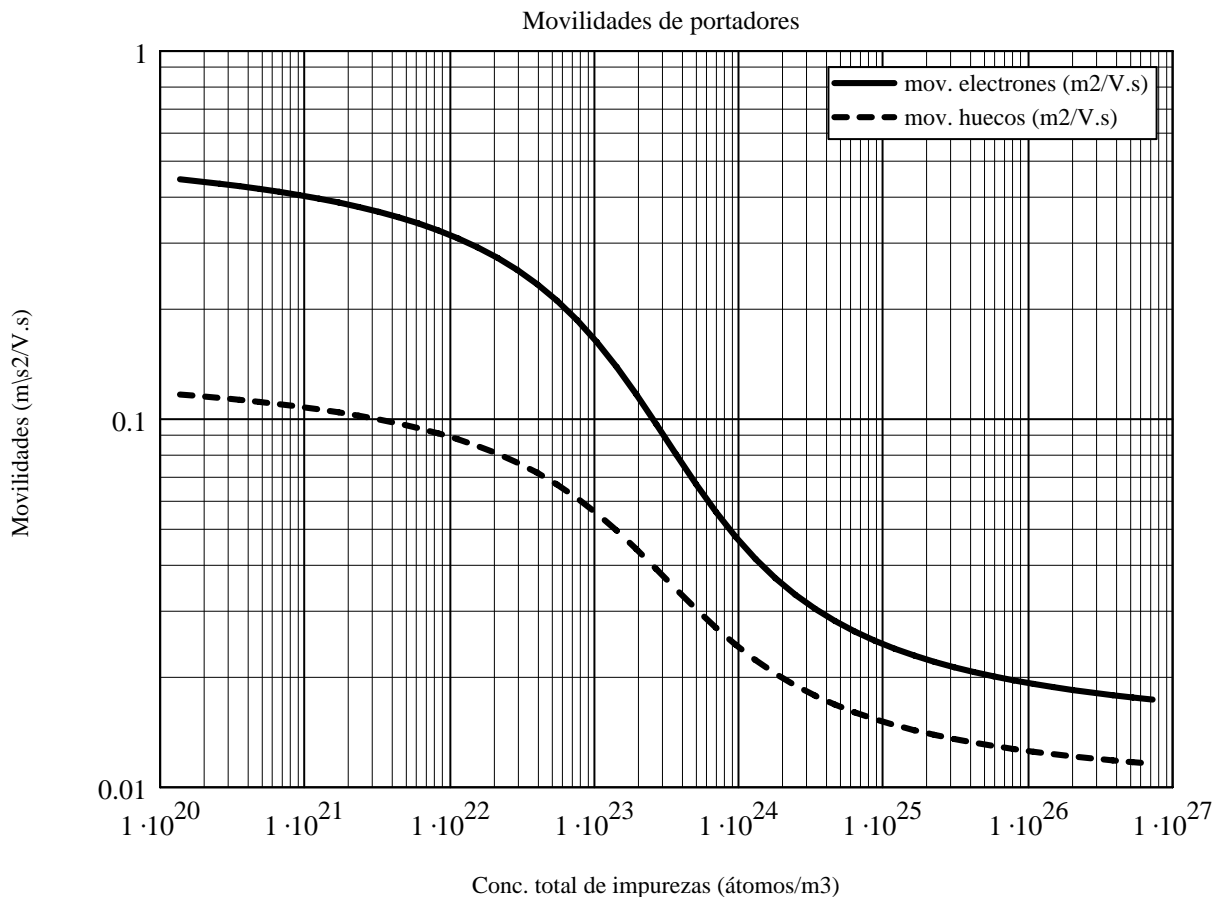
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99





**Sol.:** la concentración del dopante aceptador de electrones (que genera 1 hueco o falta de electrón por cada átomo de dopante) es mayor que la del dopante donador (que proporciona 1 electrón por cada átomo); el semiconductor es extrínseco tipo *p* y la concentración de portadores mayoritarios es:

$$p_p = N_{III} - N_V \quad p_p = 2.74 \times 10^{23} \text{ huecos positivos/m}^3$$

La conductividad eléctrica del semiconductor extrínseco tipo *p* se calcula mediante:

$$\sigma_{ext\_p} = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot p_p \cdot \text{mov\_p}(N_{III} + N_V) \quad \text{S/m}$$

y la movilidad de los huecos se lee en la figura entrando con la concentración total de impurezas

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

▣ \_\_\_\_\_

▣ \_\_\_\_\_

7. Un polímero se procesa mediante extrusión soplado. En operación estacionaria el campo de velocidad válido en todos los puntos del fluido está dado por:

$$v_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} x_1$$
$$v_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} x_2$$
$$v_3(x_1, x_2, x_3) = -\dot{\epsilon} x_3$$

con  $\epsilon_{\text{punto}} = 23 \text{ s}^{-1}$ , y referido a un sistema de coordenadas cartesiano con los siguientes ejes:

- eje 3 en la dirección radial y
- ejes 1 y 2 tangenciales a la superficie del polímero, y perpendiculares entre sí y al eje 3.

La viscosidad del polímero fundido a la temperatura de procesado se considera constante,  $\eta = 1.4 \times 10^4$  Pa s. El fluido se comporta como newtoniano:

$$\underline{\underline{\tau}} = -\eta \underline{\underline{\dot{\gamma}}}$$


Calcular la potencia disipada por unidad de volumen de material ( $\text{W/m}^3$ ) debida exclusivamente al flujo viscoso, que está dada por la expresión:

$$\dot{Q} = \underline{\underline{\tau}} : (\underline{\underline{\nabla v}})^T$$

- $9.66 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$
- $-2.22 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$
- $-1.48 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$
- $-9.66 \cdot 10^5 \text{ W/m}^3$
- $2.22 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:.....

▣ \_\_\_\_\_

**Sol.: se calcula el tensor de tensiones a partir de la definición de la velocidad de deformación o gradiente de velocidad simetrizado y de la ley de Newton:**



**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**

$$\llbracket \underline{\nabla v} \rrbracket = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\epsilon} \end{bmatrix} \Rightarrow \llbracket \underline{\dot{\gamma}} \rrbracket = \llbracket (\underline{\nabla v}) + (\underline{\nabla v})^T \rrbracket = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -2\dot{\epsilon} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} -\eta \dot{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\eta \dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 2\eta \dot{\epsilon} \end{bmatrix}$$

La potencia disipada por unidad de volumen, según la definición es:

$$\dot{Q} = \underline{\underline{\tau}} : (\underline{\nabla v})^T = \tau_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \tau_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \tau_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \tau_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\eta \frac{\dot{\epsilon}^2}{2} - \eta \frac{\dot{\epsilon}^2}{2} - 2\eta \dot{\epsilon}^2 = -3\eta \dot{\epsilon}^2$$

$$-3 \cdot \eta \cdot \epsilon_{\text{punto}}^2 = -2.222 \times 10^7 \quad \text{W/m}^3$$

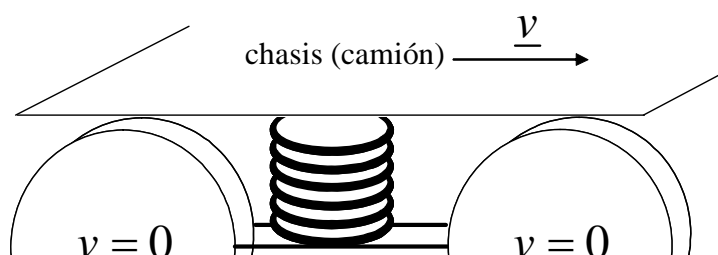


8. Un material compuesto a capas de dos materiales A y B (ambos homogéneos e isótropos), que cumple la ley de Hooke, se utiliza como elemento amortiguador en un camión que circula a una velocidad  $v = 25$  m/s. Este elemento va fijado al eje del camión en su parte inferior y al chasis en su parte superior (ver figura), y tiene una altura  $L = 0.5$  m y una sección transversal  $A = 0.28$  m<sup>2</sup>. En una frenada, y de forma aproximada, las ruedas se paran instantáneamente (es decir, velocidad 0 a tiempo 0), mientras que el resto del camión, de masa  $M = 40$  toneladas, tarda en detenerse  $\Delta t = 0.05$  s.

Se conocen las fracciones volumétricas, los módulos elásticos y las relaciones de Poisson de A y B:

$$V_A = 0.25, V_B = 0.75, E_A = 1.2 \times 10^7 \text{ Pa}, E_B = 7.1 \times 10^7 \text{ Pa}, \nu_A = 0.45 \text{ y } \nu_B = 0.48$$

¿Cuál es el módulo de ingeniería ( $E_i, G_{ij}, \nu_{ij}, K$ ) del material compuesto, que se necesita para calcular la deformación que sufre el elemento amortiguador, debida sólo a la deceleración y cuál es su valor? Calcular dicho módulo a partir de las propiedades de A y B (utilizar sólo una regla de mezcla: la aritmética (Voigt) o la armónica (Reuss), pero no las dos).



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

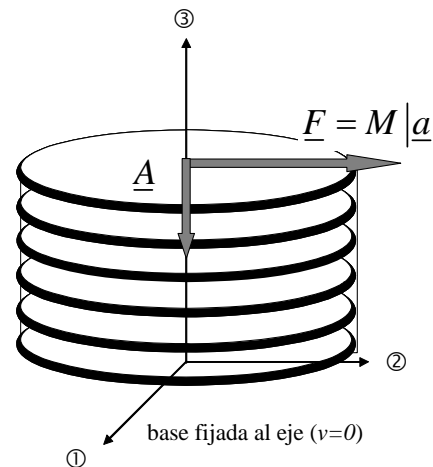
Cartagena99

- $3.185 \cdot 10^7$  Pa
- $1.091 \cdot 10^7$  Pa
- $9.963 \cdot 10^6$  Pa
- ninguna de las anteriores; la respuesta correcta es:



**Sol.:** se trata de un material de la clase  $\infty / mm$  y los ejes se colocan como en la figura:

El material compuesto está sometido a una tensión tangencial en el plano 13 o en el plano 23, es decir  $\tau_5$  o  $\tau_4$  en notación de Voigt, y sufrirá una deformación angular en condiciones de isotensión: la fuerza  $\underline{F}$ , en dirección 2 en la figura, actúa sobre A y B por igual y sobre la misma superficie, cuya normal exterior apunta en dirección 3 negativa. La tensión,  $\tau_4 > 0$  por ser un sólido, es la misma en A, B y el compuesto. La deformación angular de ambos componentes será diferente.



Se necesita calcular un módulo cortante  $G_{tl}$  o  $G_{lt}$  en condiciones de isotensión (regla de mezcla armónica o de Reuss), pero primero se necesitan los módulos cortantes de A y B (isótropos):

$$G_A = \frac{E_A}{2(1 + \nu_A)} \quad G_A = 4.138 \times 10^6 \text{ Pa} \quad G_B = \frac{E_B}{2(1 + \nu_B)} \quad G_B = 2.399 \times 10^7 \text{ Pa}$$

El módulo cortante del material compuesto será:

$$G_{tl} = \left( \frac{\nu_A}{G_A} + \frac{\nu_B}{G_B} \right)^{-1} \quad G_{tl} = 1.091 \times 10^7 \quad \text{Pa}$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Cartagena99

Nombre y apellidos:

Número de matrícula:

**Problema 1**

Un material cerámico utilizado como semiconductor es una solución sólida de sulfuro de estroncio (SrS) en sulfuro de plomo (PbS). La estructura cristalográfica del PbS puro es del tipo NaCl. En las soluciones sólidas PbS-SrS se mantienen el número total de aniones en la estructura y el tamaño (longitud de la arista) de la celda, en los mismos valores que en la estructura del PbS puro. La solución sólida se forma por sustitución del 15% de los iones  $\text{Pb}^{2+}$  por iones  $\text{Sr}^{2+}$ . Usando los siguientes datos:

- radios iónicos  $r_{\text{S}^{2-}} = 0.184 \cdot 10^{-9}\text{m}$ ;  $r_{\text{Sr}^{2+}} = 0.118 \cdot 10^{-9}\text{m}$ ;  $r_{\text{Pb}^{2+}} = 0.120 \cdot 10^{-9}\text{m}$
- masas atómicas:  $Mw_{\text{S}} = 32.07 \text{ kg/kmol}$ ;  $Mw_{\text{Sr}} = 87.62 \text{ kg/kmol}$ ;  $Mw_{\text{Pb}} = 207.2 \text{ kg/kmol}$

y considerando todos los átomos como esféricos, calcular:

1. la densidad cristalográfica de la solución sólida (en  $\text{kg/m}^3$ )
2. la variación porcentual relativa de la densidad ( $\frac{\rho_{\text{PbS puro}} - \rho_{\text{sol.sólida}}}{\rho_{\text{PbS puro}}} \cdot 100$ )
3. la composición porcentual molar (% molar de PbS y % molar de SrS) de la solución sólida
4. las fracciones másicas de azufre (S), estroncio (Sr) y plomo (Pb) en la solución sólida ( $X_{\text{S}}$ ,  $X_{\text{Sr}}$  y  $X_{\text{Pb}}$ )
5. Por otra parte, es sabido que las propiedades termoeléctricas del PbS pueden mejorar si se dopa con elementos como el sodio (Na), alcanzándose un valor óptimo para dichas propiedades cuando la relación entre el número de iones  $\text{Pb}^{2+}$  y el número de iones  $\text{Na}^+$  es de 40 ( $\frac{n^{\circ} \text{ iones Pb}^{2+}}{n^{\circ} \text{ iones Na}^+} = 40$ ).

Determinar la concentración de impurezas ( $\frac{\text{iones Na}^+}{\text{m}^3 \text{ sol.sólida}}$ ) que produce esa relación óptima en el caso de la solución sólida del problema. (Suponer que el volumen de la solución sólida permanece constante).

**(3 puntos, 45 minutos)**

The logo for Cartagena99 features the word "Cartagena" in a stylized, blue, serif font with a slight shadow, followed by "99" in a larger, bold, blue font. The text is set against a light blue background with a subtle gradient and a white shadow effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

**Sol:** al ser la estructura cristalográfica del PbS puro tipo NaCl, los iones  $S^{2-}$  se encuentran ocupando las posiciones de una estructura FCC mientras que los iones  $Pb^{2+}$  se disponen en todos los huecos octaédricos. Puesto que en la solución sólida PbS-SrS se mantiene el número total de aniones en la estructura y los iones  $Pb^{2+}$  y  $Sr^{2+}$  presentan la misma carga formal, el número total de cationes en la solución sólida debe ser el mismo que en la estructura del PbS puro.

La arista de la celda unitaria, tanto en el PbS puro como en la solución sólida (ver enunciado), es:

$$a = 2(r_{S^{2-}} + r_{Pb^{2+}}) = 6.08 \cdot 10^{-10} m$$

1. Conocida la arista de la celda unitaria, para poder determinar la densidad cristalográfica de la solución sólida (en  $kg/m^3$ ) es necesario conocer la masa de los iones contenidos en la celda:

$$n^{\circ} \text{ de iones } S^{2-} = 4$$

$$n^{\circ} \text{ de iones } Pb^{2+} = 4 \cdot (1 - 0.15) = 3.4$$

$$n^{\circ} \text{ de iones } Sr^{2+} = 4 \cdot 0.15 = 0.6$$

La densidad pedida es:

$$\rho_{sol.sólida} = \frac{m}{V} = \frac{n_{S^{2-}} \cdot Mw_S + n_{Pb^{2+}} \cdot Mw_{Pb} + n_{Sr^{2+}} \cdot Mw_{Sr}}{a^3 \cdot N_A \cdot 10^3} = 6540.07 \text{ kg/m}^3$$

2. Para calcular la variación porcentual relativa de la densidad ( $\frac{\rho_{PbS \text{ puro}} - \rho_{sol.sólida}}{\rho_{PbS \text{ puro}}} \cdot 100$ ), es necesario determinar la densidad del PbS puro:

$$\rho_{PbS} = \frac{m}{V} = \frac{4 \cdot Mw_S + 4 \cdot Mw_{Pb}}{a^3 \cdot N_A \cdot 10^3} = 7070.09 \text{ kg/m}^3$$

por lo que

$$\frac{\rho_{PbS \text{ puro}} - \rho_{sol.sólida}}{\rho_{PbS \text{ puro}}} \cdot 100 = \frac{7070.09 - 6540.07}{7070.09} \cdot 100 = 7.50\%$$

3. la composición porcentual molar (% molar de PbS y % molar de SrS) de la solución sólida se determina a partir del porcentaje de sustitución de iones  $Pb^{2+}$  por  $Sr^{2+}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

4. Considerando como base de cálculo una celda unitaria, las fracciones másicas de azufre (S), estroncio (Sr) y plomo (Pb) en la solución sólida ( $X_S$ ,  $X_{Sr}$  y  $X_{Pb}$ ) son:

$$X_S = \frac{\text{masa}_S}{\text{masa}_S + \text{masa}_{Pb} + \text{masa}_{Sr}} = \frac{4 \cdot Mw_S}{4 \cdot Mw_S + 3.4 \cdot Mw_{Pb} + 0.6 \cdot Mw_{Sr}} = 0.145$$

$$X_{Pb} = \frac{\text{masa}_{Pb}}{\text{masa}_S + \text{masa}_{Pb} + \text{masa}_{Sr}} = \frac{3.4 \cdot Mw_{Pb}}{4 \cdot Mw_S + 3.4 \cdot Mw_{Pb} + 0.6 \cdot Mw_{Sr}} = 0.796$$

$$X_{Sr} = \frac{\text{masa}_{Sr}}{\text{masa}_S + \text{masa}_{Pb} + \text{masa}_{Sr}} = \frac{0.6 \cdot Mw_{Sr}}{4 \cdot Mw_S + 3.4 \cdot Mw_{Pb} + 0.6 \cdot Mw_{Sr}} = 0.059$$

5. La concentración de impurezas ( $\frac{\text{iones Na}^+}{\text{m}^3 \text{ sol.sólida}}$ ) se calcula de forma inmediata conocida la relación entre el número de iones  $\text{Na}^+$  y  $\text{Pb}^{2+}$  ( $\frac{n^\circ \text{ iones Pb}^{2+}}{n^\circ \text{ iones Na}^+} = 40$ ). Así, para una celda unitaria:

$$\frac{\text{iones Na}^+}{\text{m}^3 \text{ sol.sólida}} = \frac{\frac{n^\circ \text{ iones Pb}^{2+}}{40}}{a^3} = \frac{3.4}{40} = \frac{40}{a^3} = 3.782 \cdot 10^{26}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

## Problema 2

Nombre y apellidos:

Número de matrícula:



Se ha sintetizado en el laboratorio un monocristal de un material semiconductor A y, para identificar su estructura, se llevan a cabo varios experimentos:

1. se mide la conductividad eléctrica de la muestra en un sistema de referencia cuyos ejes no están orientados como los ejes convencionales y se obtiene (escrita  $\sigma$  como matriz):

$$\sigma = \begin{pmatrix} 12.125 & -4.98 & 0 \\ -4.98 & 6.375 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{pmatrix} \quad \text{S/m}$$

2. cuando se prepara una muestra de A en forma de cubo, con las caras cortadas perpendicularmente a las direcciones convencionales del material, suponiendo que éstas son conocidas, y se somete la muestra de A a un campo eléctrico  $\underline{E}$  con componentes  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  no nulas (referidas a los ejes convencionales), se observa que el cubo se deforma angularmente (a cortadura) en uno o varios planos. No se analizan las deformaciones longitudinales (puede haber o no).

3. en otro ensayo posterior, análogo al anterior, se somete el mismo cubo a una diferencia de potencial entre las caras 3, y se observa que el cubo sólo se deforma angularmente en el plano 1-2. Tampoco se analizan las deformaciones longitudinales esta vez.

4. por último, se somete el cubo de los apartados anteriores a un ensayo mecánico de compresión entre las caras 1 y se observa que varían las longitudes de todas las aristas del cubo y además se deforma angularmente en el plano 1-2.

- Determinar las conductividades eléctricas principales del material (es decir, medidas en las direcciones de los ejes principales),
- determinar las direcciones de los ejes principales del material, (es decir, dar vectores unitarios en estas direcciones expresados en el sistema de referencia en que se ha medido la conductividad eléctrica),
- determinar las direcciones de los ejes convencionales del material y expresar la conductividad eléctrica del material en forma de matriz, referida a los ejes convencionales,
- basándose sólo en los resultados obtenidos en los tres apartados anteriores (sin usar la información dada en los puntos 2, 3 y 4 del enunciado), decir a qué sistema o sistemas cristalográficos puede pertenecer A, justificando la respuesta,
- basándose además en la información dada en los puntos 2 y 3 del enunciado, y en ese orden,

**CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70**

---

**ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70**





**Sol.:** las direcciones principales y las conductividades principales se obtienen diagonalizando la matriz de conductividad. Los autovalores (conductividades principales) son:

$$\sigma_{\text{principales}_{1,1}} = 15 \quad \text{S/m}$$

$$\sigma_{\text{principales}_{2,2}} = 3.5 \quad \text{S/m}$$

$$\sigma_{\text{principales}_{3,3}} = 3.5 \quad \text{S/m}$$

Y las direcciones principales están dadas por los autovectores unitarios (triedro a derechas):

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} -0.866 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.866 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sólo con estos resultados (dos valores iguales y uno diferente para las conductividades principales), A puede ser:

**trigonal, tetragonal o hexagonal.**

En estos tres sistemas cristalográficos (todas las clases) los ejes convencionales coinciden con los principales: las matrices de propiedades de 2º orden simétricas, expresadas en los ejes convencionales, ya son diagonales. Pero las estructuras de esas matrices muestran que los dos valores iguales de la propiedad son las componentes 11 y 22; en vista de los valores obtenidos para las conductividades principales, esto quiere decir que el autovector unitario  $\delta_1$  corresponde a la dirección convencional 3 (autovalor diferente) y los autovectores  $\delta_2$  y  $\delta_3$  corresponden a las direcciones convencionales 1 y 2 o 2 y 1 (autovalores iguales). Los vectores unitarios de las direcciones convencionales y la conductividad eléctrica expresada en estos ejes serán:

$$\delta_{1\text{conv}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \delta_{2\text{conv}} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.866 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \delta_{3\text{conv}} = \begin{pmatrix} -0.866 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_{\text{convencionales}} = \begin{pmatrix} 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \text{ S/m}$$

Un material centrosimétrico no puede tener propiedades de orden impar, es decir, no se deformará ante un campo eléctrico (piezoelectricidad inversa). Como consecuencia, las clases centrosimétricas de los sistemas trigonal, tetragonal y hexagonal quedan descartadas:

$$\bar{3}, \bar{3}m, 4/m, 4/mmm, 6/m \text{ y } 6/mmm$$

Para las clases restantes se aplica la ley constitutiva de la piezoelectricidad inversa con un campo

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} d = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{bmatrix} = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6]$$

aparecen deformaciones angulares en planos 2-3, 1-3 y 1-2.

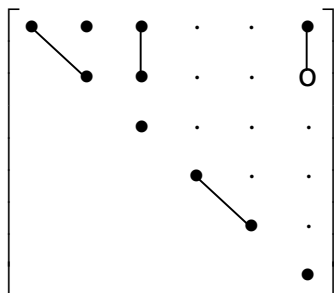
Se comprueba que las clases que cumplen este requisito y que serían aceptables son todas las clases trigonales, tetragonales y hexagonales no centrosimétricas, es decir:

3, 32, 3m, 4,  $\bar{4}$ , 422, 4mm,  $\bar{4}2m$ , 6,  $\bar{6}$ , 622, 6mm, y  $\bar{6}m2$

Utilizando la información del punto 3 del enunciado, se puede descartar alguna clase: ante un campo eléctrico en dirección 3 convencional (diferencia de potencial entre caras 3 del cubo de muestra), y sin analizar las deformaciones longitudinales, la única deformación angular que se obtiene es en el plano 1-2, es decir, sólo componente  $\varepsilon_6$ . Este comportamiento sólo lo tienen las clases con un módulo piezoeléctrico  $d_{36}$  distinto de cero, es decir las clases:

$\bar{4}$  y  $\bar{4}2m$

Por último, la condición de responder con deformación angular en el plano 1-2 ( $\varepsilon_6$ ) ante una compresión entre caras 1, implica que la estructura de la complianza elástica debe tener una componente  $s_{61} = s_{16}$  distinta de cero. La única estructura que lo cumple es:



que pertenece a la clase:  $\bar{4}$  y que cumple todos los requisitos del material buscado.



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE  
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

---

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS  
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70