Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

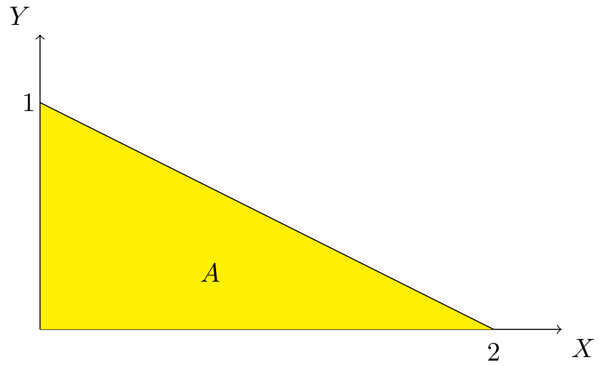
Examen final de Matemáticas para la Economía I. 9 de Enero de 2019.

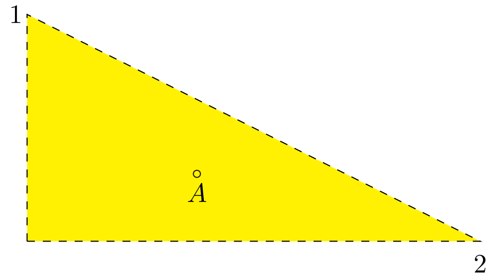
---

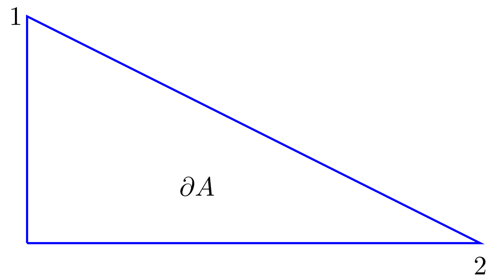
(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2y + x \leq 2\}$ y la función $f(x, y) = x - y^2$.

(a) Dibuje el conjunto A, su interior y frontera. Justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

Solución: *El conjunto A su interior y su frontera son:*







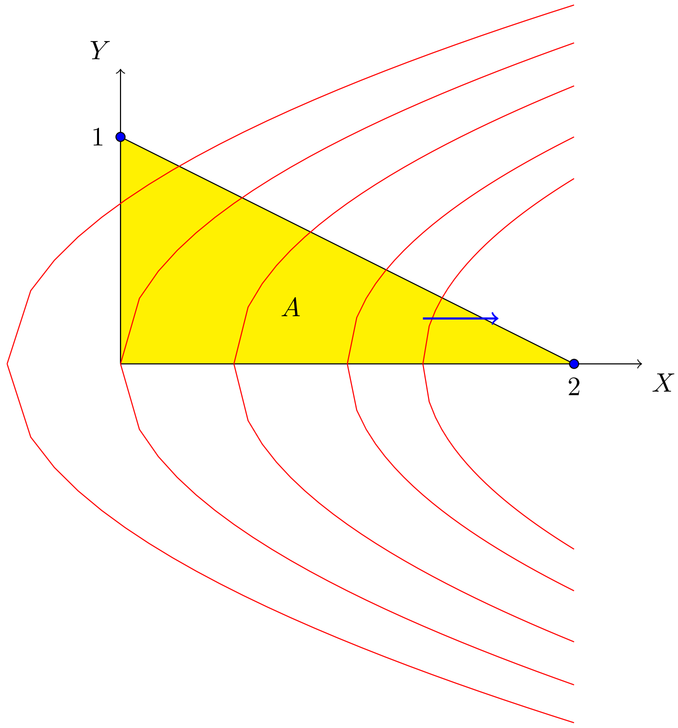
Como el conjunto A contiene su frontera es cerrado. Y como no coincide con su interior, no es abierto. Gráficamente, observamos que el conjunto A es convexo y acotado. Como es cerrado y acotado, el conjunto A es compacto.

(b) Enuncie el Teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función f definida en A.

Solución: *La función $f(x, y) = x - y^2$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$. Y, por lo tanto, es continua en $A \subset \mathbb{R}^2$. Como el conjunto A es compacto, se verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass. La función f alcanza un máximo y un mínimo absolutos en el conjunto A.*

(c) Utilizando las curvas de nivel, determine si la función $f(x, y)$ del apartado anterior alcanza máximo o mínimo en el conjunto A. En caso afirmativo, calcule los puntos donde se alcanzan los valores extremos y los valores máximo y/o mínimo de f en el conjunto A.

Solución: *Las curvas de nivel de f son:*



La flecha indica la dirección de crecimiento de la función f. Vemos que el valor máximo de f se alcanza en el punto $(2, 0)$. El valor máximo de f en A es $f(2, 0) = 2$. El valor mínimo de f se alcanza en el punto $(0, 1)$. El valor mínimo de f en A es $f(0, 1) = -1$.

(2) Considere la función $f(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + cz^2 + 2abxy$ en $\mathbb{R}^2$, con $a < 0$, $c \neq 0$.

(a) Discutir, según los valores de los parámetros a, b y c, cuándo f es estrictamente cóncava o es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$.

Solución:
Definimos la función $h(x, y, z) = f(z, y, x) = az^2 + ay^2 + cx^2 + 2abzy$. La función h es estrictamente cóncava (resp. convexa) si y sólo si f es cóncava (resp. convexa). La matriz Hessiana de h es

$$\mathrm{H}(h)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2c & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 2ab \\ 0 & 2ab & 2a \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$\begin{aligned} D_1 &= 2c \\ D_2 &= 4ac \\ D_3 &= 8a^2 \left(1 - b^2\right) c \end{aligned}$$

- *Si $a < 0$, $c < 0$ y $|b| < 1$, entonces la función f es estrictamente cóncava, ya que $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$.*
- *Si $a < 0$, $c < 0$ y $|b| > 1$, entonces la función f no es ni cóncava ni convexa, ya que $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 > 0$.*
- *Finalmente, si $a < 0$, $c < 0$ y $|b| = 1$, entonces la función f es $f(x, y, z) = a(x + by)^2 + cz^2$, con $b = \pm 1$, que es cóncava pero no estrictamente cóncava .*

(b) Utilizando los resultados anteriores, determine si el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - x^2 - xy - y^2 - z^2 \geq 0\}$ es convexo.

Solución: *Consideramos la función $g(z, y, x) = -x^2 - xy - y^2 - z^2$. Esta función se obtiene de la función $f(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + cz^2 + 2abxy$ tomando $a = -1$, $b = 1/2$, $c = -1$. Por el apartado anterior, la función g es estrictamente cóncava. Como $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(z, y, x) \geq -4\}$, el conjunto A es convexo.*

(3) Considere la ecuación

$$ye^{xz} + y^2 z = 3$$

(a) Utilizando el teorema de la función implícita demuestre que la ecuación anterior define una función z en un entorno del punto $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

Solución: *Consideramos la función* $f(x, y, z) = ye^{xz} + y^2 z$. *Vemos que* $f(0, 1, 2) = 3$. *Además,*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2) = \left(xye^{xz} + y^2\right)\Big|_{x=0,y=1,z=2} = 1 \neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, la ecuación $f(x, y, z) = 3$ *define una función* $z(x, y)$ *en un entorno del punto* $(0, 1)$.

(b) Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1),$$

Solución: *Derivando implícitamente la ecuación* $f(x, y, z) = 3$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = y^2\frac{\partial z}{\partial x} + ye^{xz}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right) \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = y^2\frac{\partial z}{\partial y} + xye^{xz}\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz + e^{xz} \end{aligned}$$

valida para (x, y) *en un entorno del punto* $(0, 1)$. *Sustituyendo* $x = 0, y = 1, z = 2$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} 0 &= 2 + \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) \\ 0 &= 1 + 4 + \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) \end{aligned}$$

Y obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -2 \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = -5$$

(c) Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x, y)$, calculada en el apartado (a), en el punto $q = (0, 1)$.

Solución: *La ecuación del plano tangente a la gráfica de la función* $z(x, y)$ *en el punto* $q = (0, 1)$ *es*

$$z = z(0,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)(y-1) = 2 - 2x - 5(y-1) = 7 - 2x - 5y$$

(4) Considere una función $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y tres funciones $x(u, v), y(u, v), z(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Considere la función compuesta $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

(a) Enuncie la regla de la cadena para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial h}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

(b) Utilice el apartado anterior para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$

para las funciones

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xz$$

y

$$x(u, v) = 2u + v, \quad y(u, v) = u - 2v, \quad z(u, v) = uv$$

Solución: *Tenemos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + z = uv + 4u + 2v \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y = 4v - 2u \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x = 2u + v \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = v$$

o

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -2, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial u} &= (uv + 4u + 2v)2 + (4v - 2u) + (2u + v)v = 4uv + 6u + v^2 + 8v \\ \frac{\partial h}{\partial v} &= (uv + 4u + 2v) + (4v - 2u)(-2) + (2u + v)u = 2u^2 + 2uv + 8u - 6v \end{aligned}$$

(5) Sea $f(x, y, z) = x\ln(yz) - x^2 - y^2 - z^2$, $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Halle el gradiente de f en el punto $p = (0, 1, 1)$. Determine para qué valores de a, b, c se verifica que $D_v f(p) = 0$.

Solución: *Tenemos que*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,1) &= (\log(yz) - 2x)\big|_{x=0,y=1,z=1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) &= \left(\frac{x}{y} - 2y\right)\Big|_{x=0,y=1,z=1} = -2 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,1) &= \left(\frac{x}{z} - 2z\right)\Big|_{x=0,y=1,z=1} = -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D_v f(p) = \nabla(p) \cdot v = (0, -2, -2) \cdot (a, b, c) = -2b - 2c = -2(b + c)$$

Por lo tanto, $D_v f(p) = 0$ *si y sólo si* $c = -b$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Escriba el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y, z)$ en un entorno del punto $p = (0, 1, 1)$.

Solución: *La matriz Hessiana de* f *es*

$$\mathrm{H}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} - 2 & 0 \\ \frac{1}{z} & 0 & -\frac{x}{z^2} - 2 \end{pmatrix}$$

en el punto $p = (0, 1, 1)$,

$$\mathrm{H}(f)(0,1,1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El polinomio de Taylor es

$$\begin{aligned} P_2(x,y,z) &= f(0,1,1) + \nabla f(0,1,1) \cdot (x, y-1, z-1) + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + 2x(y-1) + 2x(z-1) - 2(y-1)^2 - 2(z-1)^2\right) \\ &= -2 - 2(y-1) - 2(z-1) - x^2 + x(y-1) + x(z-1) - (y-1)^2 - (z-1)^2 \end{aligned}$$